

**ANNALES CORRIGÉES
ET COMPLÉMENTS**
du cours de
Mécanique des Milieux Continus

Professeur Olivier THUAL
INPT/ENSEEIH

15 décembre 2006

Sommaire

Ce fascicule contient des documents complémentaires au polycopié principal du cours intitulé “INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS DÉFORMABLES” dans le cadre de la première année de formation du cycle d’ingénieur du Département “Hydraulique et Mécanique des Fluides” de l’ENSEEIH.HT.

Il contient les éléments suivants :

- **Organisation générale du cours “mécanique des milieux continus”** : syllabus du cours, déroulement pratique du cours, programme détaillé cours/TD et fiche d’évaluation de l’enseignement.
- **Errata du livre** : Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables - O. Thual - Cépaduès 1997.
- **Annales corrigées des partiels** : portant sur les chapitre 1 à 5.
- **Annales corrigées des examens** : portant sur les chapitre 1 à 8.
- **Présentation synthétique du cours** : copie des planches du diaporama de présentation du cours.
- **Copie des transparents du cours.**

L’éventuelle mise à jour (voir les dates) de ces documents est disponible à l’adresse :

<http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual>

ORGANISATION GÉNÉRALE DU COURS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

O. Thual, 15 septembre 2006

L'objet de cette note est de donner un certain nombre d'informations pratiques concernant l'organisation du cours de "Mécanique des Milieux Continus" en première année de la formation d'ingénieur du Département "Hydraulique - Mécanique des Fluides" de l'ENSEEIH.

0.1 SYLLABUS

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Semestre A Cours : 11 x 1h45 h TD : 11 x 1h45 h Crédits : 4

Mots-Clés : mécanique, milieux continus, équations de bilan, lois de comportement, équations de Navier-Stokes.

Bibliographie : [1] Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables - O. Thual - Cépaduès 1997. [2] <http://www-hmf.enseeiht.fr>

Objectif : Assimiler les concepts de base de la mécanique des milieux continus en amont des cours d'élasticité et de mécanique des fluides. Comprendre la dérivation exhaustive des équations de Lamé (élasticité) et de Navier-Stokes (mécanique des fluides).

Programme : Le cours débute par la présentation de quelques expériences de base. L'étude des grandes déformations permet de présenter le tenseur des dilatations et d'introduire les notions de représentations lagrangienne et eulérienne. L'étude de la cinématique des milieux continus comprend la présentation du tenseur des taux de déformation et débouche sur les théorèmes de transport. Les notions de vecteur flux et de tenseur des contraintes sont présentées à partir de l'hypothèse de milieu continu.

Tous les outils sont alors en place pour appliquer aux milieux continus les principales lois de conservation de la mécanique : masse, quantité de mouvement et énergie. La présentation des lois de comportement de l'élasticité linéaire et des fluides newtoniens permet de conclure en écrivant les équations de Lamé et de Navier-Stokes.

O. THUAL, C. BOSC, M. DUVAL

0.2 DÉROULEMENT PRATIQUE

- **Informations en ligne** : comme pour les autres enseignements, les informations en ligne sur ce cours sont accessibles à la rubrique “Présentation des enseignements et Cours en ligne” de l’INTRANET du Département, sous forme lisible en INTERNET :

<http://www-hmf.enseeiht.fr/>

On y trouve, par exemple, le texte du livre corrigé des errata connus, **tous les partiels et examens des années précédentes**, un film en anglais illustrant le cours, le présent document, etc.

- **Horaires** : la présence des élèves est souhaitée aux horaires légaux définis par le Département et qui sont 8h00 - 9h45, 10h15 - 12h00, 14h00 - 15h45, 16h15 - 18h00.
- **Cours magistral** : le cours oral proprement dit durer entre 1h45 sans pause.
- **Evaluations** : l’évaluation est effectuée à l’aide d’un partiel à mi-parcours et d’un examen à la fin du cours. Ces contrôles écrits sont individuels et sans documents. Cependant, les étudiants ont la possibilité de se munir d’un aide-mémoire d’une page manuscrite A4 recto-verso pour le partiel et de deux pages pour l’examen. Ces aide-mémoires auront été préparés individuellement par les étudiants lors de leurs révisions.
- **Coefficients** : le coefficient du partiel est égal au coefficient du contrôle. Le coefficient total du cours est décidé par le Département.
- **Travaux Dirigés** : les enseignants des Travaux Dirigés ont la possibilité de donner des sujets de contrôle à faire à la maison et de les noter. Les notes inférieures à 10 pourront être alors incluses dans la moyenne avec un coefficient pouvant égaler ceux du partiel et du contrôle.
- **Livre du cours** : le support écrit principal pour ce cours est l’ouvrage “Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables” (O. Thual, Cépaduès 1997) qui est distribué aux étudiants en début de scolarité pour une période de trois ans. Cet ouvrage contient un certain nombre d’exercices que les étudiants sont encouragés à travailler.
- **Film sur CD-ROM** : plusieurs CD-ROMs sont disponibles pour un prêt de courte durée, afin de pouvoir visionner, sur un ordinateur (format .mpg) un film d’environ une heure illustrant l’exercice 3.8 du cours. Voir aussi les pages du cours en ligne.
- **Fiches d’évaluation du cours et des TDs** : les étudiants sont invités à remplir une fiche d’évaluation du cours et une fiche d’évaluation des TDs, et à les remettre le jour de l’examen final.

- **Travaux des élèves** : un certain nombre de travaux d'élèves de seconde ou de troisième année sont accessibles à l'adresse :

<http://www.enseeiht.fr/travaux>

La consultation de ces pages peut servir, entre autres choses, à mûrir les choix d'options ou de stage tout au long de la scolarité.

- **Bibliographie** : prêt à la bibliothèque des ouvrages de la bibliographie du livre.

0.3 PROGRAMME DÉTAILLÉ COURS/TD

Cours/TD	Programme	Date
CR 01	Chapitre 1 , Chapitre 2	18/09
TD 1	Exos 1.1 et 1.2	19/09
CR 02	Chapitre 2 - exo 2.1	25/09
TD 2	Exo 2.2 et 2.3	23/09
CR 03	Chapitre 2, Chapitre 3 - exo 3.1	26/09
TD 3	Exos 3.2 et 3.6	27/09
CR 04	Chapitre 3	2/10
TD 4	Exo 3.7	3/10
DM	Pb 3.8 en "DM" à remettre	5/10
CR 05	Chapitre 3 (suite et fin)	9/10
TD 5	Exercices du partiel 2005	10/10
Partiel	Chapitre 1 à 3	16/10
CR 06	Chapitre 4, Chapitre 5 - exo 5.1	23/10
TD 6	Exos 5.2 et 5.3	24/10
CR 07	Chapitre 6	13/11
TD 7	Questions 1-7 de l'examen 2005	14/11
CR 08	Chapitre 6, Chapitre 7	20/11
TD 8	Exo 7.2 et 7.3	21/11
CR 09	Chapitre 7	27/11
TD 9	Pb 7.5	28/11
CR 10	Chapitre 8	4/12
TD 10	Examen 2002	5/12
Examen	Chapitres 1 à 8	11/12

FICHE D'ÉVALUATION DU COURS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Afin d'établir un bilan du cours et d'envisager des modifications de l'enseignement, merci de bien vouloir remplir ce questionnaire.

NOM (facultatif :) :

	Très Bien	Bien	Moyen	Passable	Mauvais	Commentaires
Définition des objectifs du cours						
Documentation écrite du cours						
Intervention de l'enseignant						
Contrôle des connaissances						
Atteinte des objectifs du cours						

Commentaires supplémentaires :

FICHE D'ÉVALUATION DES TD ASSOCIÉS AU COURS

NOM DE L'ENSEIGNANT DE TD :

Afin d'établir un bilan des TD et d'envisager des modifications de l'enseignement, merci de bien vouloir remplir ce questionnaire.

NOM (facultatif :) :

	Très Bien	Bien	Moyen	Passable	Mauvais	Commentaires
Choix des sujets d'exercices						
Documentation écrite du TD						
Intervention de l'enseignant						
Participation des élèves						
Articulation avec le cours						

Commentaires supplémentaires :

ERRATA DU LIVRE

Erreurs portant sur le fond

1. **p. viii** : remplacer l'expression "produit contracté" par "produit **dou-
blement contracté**" dans tout le livre
 $\underline{A} : \underline{A}'$ Produit **doublement** contracté de deux tenseurs
2. **p. 11, Figure 1.7** : le zéro de l'axe x_3 est sur la plaque du bas et non sur la plaque du haut.
3. **p. 26, titre de 2.2.1** : $\mathcal{C}(\underline{a}, \underline{\delta a}, \underline{\delta a}')$ au lieu de $\mathcal{C}(\underline{a}, \delta a, \delta a')$
4. **p. 33 équation (2.27)** : \underline{A} au lieu de A .
5. **p. 40** : une rotation ... au lieu de un rotation
6. **p. 49, ligne fin-2** : eulérienne $B^{(E)}(\underline{x}, t)$ d'un champ ... au lieu de $B^{(L)}$
7. **p. 58, paragraphe 2, ligne 2** : du voisinage de \underline{x} ... au lieu de $\underline{x}(t)$
8. **p. 59, équation (3.44)** : $\underline{K}[\underline{x}(t), t]$ au lieu de $\underline{K}(\underline{x}, t)$ (2 occurrences)
9. **p. 59 équation (3.46)** : $\underline{D}[\underline{x}(t), t]$ au lieu de $\underline{D}(\underline{x}, t)$
10. **p. 59 équation (3.45)** : $\underline{K}[\underline{x}(t), t]$, ${}^t\underline{K}[\underline{x}(t), t]$ et $\underline{D}[\underline{x}(t), t]$, au lieu de $\underline{K}(\underline{x}, t)$, ${}^t\underline{K}(\underline{x}, t)$ et $\underline{D}(\underline{x}, t)$ (respectivement)
11. **p. 63, entre (3.55) et (3.56)** : $\underline{K}[\underline{x}(t), t]$ au lieu de $\underline{K}[\underline{x}, t]$
12. **p. 76, Exercice 3.1** : $\beta(t) = \beta_0 \sin(2\omega t)$ au lieu de $\beta(t) = \beta_0 \sin \omega t$
13. **p. 79, Exercice 3.6, ligne 1** : $U_3 = 0$ au lieu de $\underline{U}_3 = 0$
14. **p. 79, Exercice 3.6, question 3** : $A_{21} = 4\lambda$ au lieu de $A_{21} = -4\lambda$
15. **p. 79, Problème 3.7** : la convention $\underline{U} = -\underline{e}^{(3)} \wedge \underline{\text{grad}} \psi$ conduit à changer l'équation (3.102) en

$$U_1(\underline{x}, t) = \frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad U_2(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial x_1}, \quad (3.102)$$

au lieu de

$$U_1(\underline{x}, t) = -\frac{\partial\psi(\underline{x}, t)}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad U_2(\underline{x}, t) = \frac{\partial\psi(\underline{x}, t)}{\partial x_1}, \quad (3.102)$$

16. **p. 80, Problème 3.7, question 3** : ... vérifiant $\psi[\underline{x}(s), t] = \psi_0$ au lieu de $\psi[\underline{x}(s)] = \psi_0(t)$
17. **p. 80, question 12** : *supprimer la question 12 qui a déjà été posée*
18. **p. 81, Problème 3.8, question 4** : Calculer les deux premiers termes du développement limité au lieu de Calculer le développement limité
19. **p. 82, Problème 3.8, question 11** : définis par $a_1^{(i)} = (n - |i|/n) \delta l$ au lieu de $a_1^{(i)} = (|n - i|/n) \delta l$
20. **p. 87**, : ce résultat ... au lieu de cet résultat
21. **p. 89, Figure 4.2** : $\text{Log } h$ sur l'axe des abscisses au lieu de $\text{Log } \mathcal{V}(\mathcal{D}_h)$
22. **p. 128, équation (5.30)** : *il manque x_j dans le dernier terme de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial x_l} [\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}(\underline{x})] = \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl}(\underline{x}) + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}(\underline{x}), \quad (5.30)$$

23. **p. 145 et 146, section 6.2.2** : \underline{f} au lieu de $\rho \underline{f}$ ou $\underline{f}_{\text{cont}}$ au lieu de $\rho \underline{f}_{\text{cont}}$ dans les équations suivantes

$$\frac{d}{dt} \underline{\sigma}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f}_{\text{cont}} d^3x. \quad (6.24)$$

$$\mathcal{M}_{\text{extvol}}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x, \quad (6.25)$$

$$\mathcal{M}_{\text{cont}}[\mathcal{D}(t)] = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f}_{\text{cont}} d^3x \quad (6.26)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{x} \wedge \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x \quad (6.28)$$

24. **p. 161 et 162, equation (6.81)** : *terme $c\underline{W}$ en trop*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS \\ - \iint_{\Sigma(t) \cap \mathcal{D}(t)} \llbracket \underline{Q}_c \rrbracket \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x. \end{aligned} \quad (6.82)$$

25. **p. 168** : $\underline{H}(\underline{a}) \delta \underline{a}$ au lieu de $\underline{H}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}$

$$\underline{dx} - \delta \underline{a} = \underline{\xi}(\underline{a}') - \underline{\xi}(\underline{a}) = \underline{H}(\underline{a}) \delta \underline{a} + \mathcal{O}[(\delta \underline{a})^2], \quad (7.1)$$

26. **p. 169, équation (7.7)** : produit $\delta \underline{a}' \cdot \underline{\epsilon}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a}$ non défini dans ce cours

$${}^t \delta \underline{a}' \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a} = \delta a'_i \epsilon_{ij}(\underline{a}) \delta a_j. \quad (7.7)$$

27. **p. 172, équation 7.16** : $\text{Sup}_{\underline{x} \in \Omega}$ au lieu de $\text{Sup}_{x \in \Omega}$

$$l_B^{-1} = \text{Sup}_{\underline{x} \in \Omega} \frac{\|\text{grad } B^{(E)}(\underline{x})\|}{|B^{(E)}(\underline{x})|}. \quad (7.16)$$

28. **p. 174, titre de 7.3.3 et ligne suivante** : $\gamma(\underline{x}, \delta \underline{a}, \delta \underline{a}')$ au lieu de $\gamma(\underline{x}, \delta a, \delta a')$

29. **p. 179**, : On rappelle l'on a... au lieu de On rappelle l'on l'a

30. **p. 182, équation (7.49)** : remplacer l'équation par

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{\epsilon}) &= \frac{1}{2} \lambda [\text{tr}(\underline{\epsilon})]^2 + \mu \underline{\epsilon} : \underline{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_{ii})^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})^2 + \\ &\quad \mu (\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + 2\epsilon_{12}^2 + 2\epsilon_{13}^2 + 2\epsilon_{23}^2) \end{aligned} \quad (7.49)$$

31. **p. 197, question 11)** : k au lieu de R

32. **p. 199, équation (7.106)** : remplacer l'équation par

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (7.106)$$

33. **p. 200, première équation** : remplacer l'équation $x_1 = l \sin(kx_3 - \omega t)$... par

$$x_1 = l \sin(kx_3 + \omega t) \quad \text{et} \quad x_2 = 0,$$

34. **p. 200, énoncé** : remplacer $k = 40 \text{ cm}^{-1}$ par $k = \frac{1}{40} \text{ cm}^{-1}$.

35. **p. 200, question 8** : remplacer la question par 8) Calculer le terme de production d'énergie interne et commenter le résultat.

36. **p. 214, Exercice 8.2, question 6** : Calculer la chaleur totale dégagée par cette compression au lieu de ... chaleur totale par cette compression

37. **p. 215, Tableau A** : $2 \mu_n \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\Omega}}$ au lieu de $-2 \mu_n \underline{\underline{\Omega}} : \underline{\underline{\Omega}}$

38. **p. 222, Corrigé 1.1, question 1** : $\Delta_2 = -\nu \Delta_1$

39. **p. 222, Corrigé 1.2, question 3** : $\Delta = \dots = 13.5 \cdot 10^{-6}$. On en déduit ... sans unité au lieu de $\Delta = \dots = 13.5 \cdot 10^{-6}$ Pa. On en déduit ...
40. **p. 223, Corrigé 1.2, question 7** : $Q = \dots = 13.5 \cdot 10^{-6}$. On en déduit ... sans unité au lieu de $= 13.5 \cdot 10^{-6}$ Pa. On en déduit ...
41. **p. 223, Corrigé 2.2, question 3** : $\sin \gamma_{12} = C_{12}/\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}$ au lieu de $\gamma_{12} = \sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}$
42. **p. 224, Corrigé 2.3, question 4** : “lorsque k est petit, c’est une expérience ...”
43. **p. 224, Corrigé 3.2, question 4** : les unités sont des Pa/s
44. **p. 226, Corrigé 3.7, question 1** : $\operatorname{div} \underline{U} = \partial^2 \psi / \partial x_1 \partial x_2 - \partial^2 \psi / \partial x_1 \partial x_2 = 0$ au lieu de $\operatorname{div} \underline{U} = -\partial^2 \psi / \partial x_1 \partial x_2 + \partial^2 \psi / \partial x_1 \partial x_2 = 0$ avec la nouvelle convention pour la fonction de courant.
45. **p. 226, Corrigé 3.7, question 2** : Seule la troisième composante au lieu de Seule la deuxième composante
46. **p. 226, Corrigé 3.7, question 3** : avec la nouvelle convention pour la fonction de courant $\frac{d}{ds} \psi[\underline{x}(s), t] = \dots = \phi(s) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) = 0$ au lieu de $\frac{d}{ds} \psi[\underline{x}(s), t] = \dots = \phi(s) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) = 0$.
47. **p. 228, question 9** : s’écrit $(s-1)[s^2 - (2+k^2)s + 1]$ au lieu $s[s^2 - (2+k^2)s + 1]$
48. **p. 228, question 11** : $a_1^{(i)} = (n - |i|/n) \delta l$ au lieu $a_1^{(i)} = (|n - i|/n) \delta l$
49. **p. 235, question 1** : remplacer $g\underline{e}^{(3)}$ par $g(\cos \alpha \underline{e}^{(3)} - \sin \alpha \underline{e}^{(1)})$.
50. **p. 235, question 6** : remplacer $p(x, z) = f(x) - \rho_0 g z \cos \alpha$ par $p(x, z) = f(x) - \rho_0 g(\mathbf{z} - \mathbf{h}) \cos \alpha$.
51. **p. 235, question 8** : remplacer $U''(z) =$ par $U''(z) = -g \frac{\sin \alpha}{\nu}$.
52. **p. 235, question 11** : contrainte au lieu de force
53. **p. 235, question 11** : $(\cos \alpha \underline{e}^{(3)} - \sin \alpha \underline{e}^{(1)})$ au lieu de $\underline{e}^{(3)}$.
54. **p. 236, équation (9.1)** : remplacer l’équation par
- $$\underline{\sigma} = -p_{\text{atm}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \rho_0 g(h-z) \begin{pmatrix} -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & -\cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9.1)$$
55. **p. 236, question 17** : remplacer $= -\rho_0 S g h^3 \sin^2 \alpha / (3\nu_n)$ par $= -\rho_0 S g^2 h^3 \sin^2 \alpha / (3\nu_n)$

Erreurs portant sur la forme

1. **p. 13, paragraphe 2, ligne 1** : ... élastique (**chapitre 7**), on ...
2. **p. 20, ligne 3** : ... une masse de **4,5** tonnes ...
3. **p. 26, paragraphe 4** : En notation **indicée** on peut alors écrire ...
4. **p. 27, équation (2.9)** : = *au lieu de* = =
5. **p. 27, équation (2.11)** : $F_{ni}(\underline{a}) F_{nj}(\underline{a})$ *au lieu de* $F_{ni}(\underline{a}), F_{nj}(\underline{a})$
6. **p. 27, équation (2.11)** :
7. **p. 40, paragraphe 2, ligne 6** : **une** rotation *au lieu de* un rotation.
8. **p. 81, Problème 3.8, ligne 4** : $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$.
9. **p. 87, paragraphe 3, ligne 4** : **Ce** résultat *au lieu de* Cet résultat.
10. **p. 119, Tableau 5.1** : *remplacer 0 par $\underline{0}$ pour les grandeurs vectorielles nulles*
11. **p. 142, titre de 6.1.4** : **Loi** de conservation de la masse *au lieu de* Lois de conservation de la masse
12. **p. 179, ligne 1** : que l'on **a** fait *au lieu de* que l'on l' a fait.
13. **p. 183, équation (7.54)** : $\lambda = \dots$ **et** $\mu = \dots$ (7.54)
au lieu de $\lambda = \dots$ $\mu = \dots$ **et** . (7.54)

PARTIELS

Les partiels portent sur les chapitres 1 à 5 du livre “Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables”, O. Thual, Cépaduès-Éditions 1997.

PARTIEL 2006

PROBLÈME 9.1 La gomme et le chat

On considère, dans ce problème, une longueur de référence l que l'on prendra égale à 2 cm pour les tracés graphiques. On définit le domaine Ω_0 par :

$$\Omega_0 = \left\{ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 0 \leq a_2 \leq l, \quad |a_1| \leq l \text{ et } -\sqrt{l^2 - a_1^2} \leq a_3 \leq l \right\}.$$

Grandes déformations

On considère un mouvement $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$x_1 = k(t) a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \text{et} \quad x_3 = a_3 + \beta(t) a_1^2, \quad (9.2)$$

avec $k(t) = 1 + \alpha[1 - \cos(2\omega t)]$ et $\beta = \beta_0 \sin(\omega t)$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta_0 \geq 0$. Pour les tracés graphiques, on considérera les valeurs numériques $\alpha = 1/2$, $\beta_0 = 1 \text{ cm}^{-1}$ et $\omega = \pi/4 \text{ s}^{-1}$.

- 1) Tracer l'intersection entre le domaine Ω_0 et le plan $a_2 = 0$.
- 2) Tracer sur un même graphe les fonctions $k(t)$ et $\beta(t)$ en fonction du temps.
- 3) Calculer le tenseur des dilations $\underline{\underline{C}}(\underline{a}, t)$ pour tout point \underline{a} .
- 4) Calculer le volume du domaine Ω_0 et de son image $\Omega(t)$.
- 5) On considère les points $E_i, i = 1, \dots, 6$ dont les coordonnées respectives $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ sont $E_1 : (-l, 0, 0)$, $E_2 : (0, 0, -l)$, $E_3 : (l, 0, 0)$, $E_4 : (l, 0, l)$, $E_5 : (0, 0, l)$ et $E_6 : (-l, 0, l)$. Tracer ces six points dans Ω_0 .
- 6) Tracer les images $H_i, i = 1, \dots, 6$ des ces six points de coordonnées $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ au temps $t_* = 2 \text{ s}$.

- 7) Calculer la jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t_*)$ pour le point E_6 au temps $t = t_*$.
- 8) Dessiner deux petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a \underline{e}^{(3)}$ autour de E_6 en choisissant δa quelconque. Dessiner leurs images respectives $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ autour du point H_6 .
- 9) Dédire des questions précédentes un tracé approximatif de la frontière $\partial\Omega(t_*)$ du domaine $\Omega(t_*)$ dans le plan (x_1, x_3) .

Images de cercles

- 10) Interpréter les composantes de $\underline{C}(\underline{0}, t)$ pour tous temps.
- 11) On considère \mathcal{C}_b le cercle de centre $\underline{a} = \underline{0}$ et de rayon $l/4$ dans le plan (x_1, x_3) . Dessiner le cercle \mathcal{C}_b dans le domaine Ω_0 ainsi que son image au temps $t = t_* = 2$ s dans le domaine $\Omega(t_*)$, même schématiquement.
- 12) Donner l'équation de cette image à l'aide des coordonnées (x_1, x_3) .
- 13) On considère les points G et D dont les coordonnées \underline{a} respectives sont $G : (-l/2, 0, l/2)$ et $D : (l/2, 0, l/2)$. Dessiner ces points dans le domaine Ω_0 ainsi que leurs images respectives L and R au temps $t = t_*$ dans le domaine $\Omega(t_*)$.
- 14) Calculer la jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t_*)$ autour du point D .
- 15) Dessiner deux petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a \underline{e}^{(3)}$ autour de D en choisissant δa quelconque. Dessiner leurs images respectives $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ autour de l'image de D au temps $t = t_*$.
- 16) Calculer, pour le temps $t = t_*$, l'angle de glissement des directions Ox_1 et Ox_3 prises autour du point D à $t = 0$ s. Comparer avec la question précédente.
- 17) Dédire des questions précédentes le tracé approximatif de l'image au temps $t = t_*$ des petits cercles de centres respectifs G ou D et de rayon $l/10$.
- 18) Dessiner approximativement les images successives de Ω_0 de $t = 0$ s à $t = 4$ s.
- 19) À quoi est égal $\Omega(t)$ pour $t = 4$ s ?

Cinématique

- 20) Calculer le champ de vitesse eulérien $\underline{U}(\underline{x}, t)$ associé au mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ ci-dessus.
- 21) Donner l'expression $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la représentation lagrangienne du champ B dont la représentation eulérienne est $B(\underline{x}, t) = \gamma x_3^2$ pour $x_3 \geq 0$ et $B(\underline{x}, t) = 0$ pour $x_3 \leq 0$, où γ est un constante.
- 22) Donner l'expression de $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t)$.
- 23) Calculer les tenseurs des taux de déformation $\underline{D}(\underline{x}, t)$.
- 24) Tracer la trajectoire issue du point D à $t = 0$ s jusqu'à $t = 4$ s.
- 25) Calculer le taux de dilation relatif $\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt}[\delta\mathcal{V}(t)]$ d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ pris autour de cette trajectoire.

- 26) Donner l'expression du vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$.
- 27) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse pour $t = t_* = 2$ s.
- 28) On note $\rho(\underline{x}, t)$ la masse volumique d'un milieu continu contenu dans le domaine $\Omega(t)$. Écrire l'équation de conservation de la masse à l'aide des fonctions $k(t)$, $\beta(t)$.
- 29) En déduire, en supposant que $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est un champ homogène à $t = 0$, son expression pour tout temps.
- 30) Comparer ce résultat avec l'expression du jacobien $J(\underline{a}, t)$.
- 31) On note $\mathcal{B}(t) = \iint_{\Omega(t)} B(\underline{x}, t) d^3x$. Calculer $\mathcal{B}(0)$.

Corrigé page 17

Corrigé La gomme et le chat

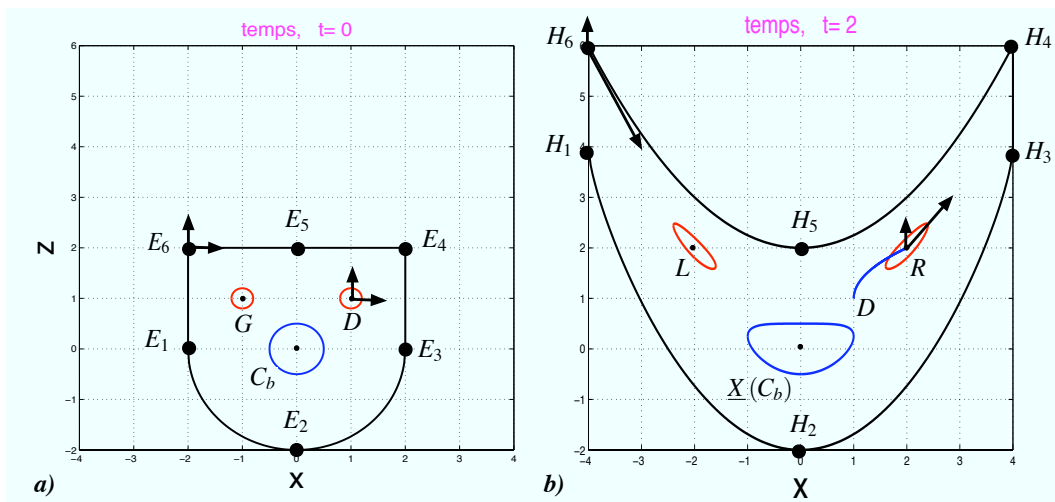


Figure 9.1: a) Ω_0 avant déformation pour $t = 0$, b) $\Omega(t_*)$ au temps $t_* = 2$ s.

Grandes déformations

1) La trace de la frontière $\partial\Omega_0$ dans le plan $x_2 = 0$ est représentée sur la figure 9.1a). 2) La fonction $k(t)$ oscille entre $k(0) = 1$ et $k(2) = 2$ avec une période de 4 s. La fonction $\beta(t)$ oscille entre $\beta(6) = -1$ et $\beta(2) = 1$ sur une période de 8 s. 3) On a $C_{11} = k^2 + 4\beta a_1^2$, $C_{22} = C_{33} = 1$, $C_{13} = C_{31} = 2\beta a_1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. 4) Le domaine Ω_0 étant un cylindre dont la section droite est la réunion d'un rectangle et d'un demi-disque, on calcule aisément que son volume est $\mathcal{V}(\Omega_0) = (2 + \pi/2)l^3$. Comme $J(\underline{a}, t) = k(t)$, on a $\mathcal{V}[\Omega(t)] = \iint_{\Omega(t)} dx^3 = \iint_{\Omega_0} J(\underline{a}, t) da^3 = k(t)\mathcal{V}(\Omega_0)$ 5) Les coordonnées $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ des points images des points E_i sont $H_1 : (-4, 0, 4)$, $H_2 : (0, 0, -2)$, $H_3 : (4, 0, 4)$, $H_4 : (4, 0, 6)$, $H_5 : (0, 0, 2)$ et $H_6 : (-4, 0, 6)$ exprimées en cm. 6) Ces points sont représentés sur la figure 9.1b). 7) Les composantes de $\underline{F}(\underline{a}, t_*)$ pour $\underline{a} = (-l, 0, l)$ sont $F_{11} = 2$, $F_{31} = -4$, $F_{22} = F_{33} = 1$ et $F_{ij} = 0$

sinon. **8)** On a $\underline{\delta x} = \underline{F}(\underline{a}, t_*) \underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}' = \underline{F}(\underline{a}, t_*) \underline{\delta a}'$ où \underline{a} est le vecteur des composantes du point E_6 . On a donc $\underline{\delta x} = \delta a(2, 0, -4)$ et $\underline{\delta x}' = \delta a(0, 0, 2)$. **9)** Le tracé de la frontière de $\Omega(t_*)$ est effectué sur la figure 9.1b).

Images de cercles

10) Les composantes de $\underline{C}(\underline{0}, t)$ sont $C_{11} = k^2$, $C_{22} = C_{33} = 1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. Les angles de glissement des directions de base sont nulles. La dilation relative dans la direction $\underline{e}^{(1)}$ est $k(t)$. Elle est égale à un pour les autres directions. **11)** La question précédente permet un tracé approximatif du cercle \mathcal{C}_b et de son image $\underline{X}(\mathcal{C}_b, t_*)$ qui sont représentés sur la figure 9.1. **12)** L'équation du contour fermé $\underline{X}(\mathcal{C}_b, t_*)$ dans le plan (x_1, x_3) s'écrit $x_1^2/k^2(t) + [x_3 - \beta(t)x_1^2/k^2(t)]^2 = l^2/16$. **13)** Le tracé des points G et D et de leurs images L and R est effectué sur la figure 9.1. **14)** Les composantes de $\underline{F}(\underline{a}, t_*)$ où $\underline{a} = (l/2, 0, l/2)$ sont $F_{11} = 2$, $F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{31} = 2$ et $F_{ij} = 0$ sinon. **15)** On a $\underline{\delta x} = \underline{F}(\underline{a}, t_*) \underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}' = \underline{F}(\underline{a}, t_*) \underline{\delta a}'$ où \underline{a} est le vecteur des composantes du point D . On a donc $\underline{\delta x} = \delta a(2, 0, -4)$ et $\underline{\delta x}' = \delta a(0, 0, 2)$. **16)** Les deux petits vecteurs $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ font un angle de $\pi/4$. L'angle de glissement est donc $\gamma_{12} = \pi/4$. **17)** Comme $l/10$ peut être considéré comme relativement petit devant l'échelle $1/\beta_0$, l'image des "yeux du chat" sont des presque des ellipses que l'on peut tracer à partir des petits vecteurs $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$. **18)** Les images successives de Ω_0 pour $t \in [0s, 8s]$ sont visibles sous forme d'animation à l'adresse <http://www.enseeiht.fr/thual/otmmc/>. **19)** On a $\Omega(t) = \Omega_0$ pour $t = 4$ s.

Cinématique

20) Les composantes du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ sont $U_1 = \dot{k}(t)x_1/k(t)$, $U_2 = 0$ et $U_3 = \dot{\beta}(t)x_1^2/k^2(t)$. **21)** On a $B^{(L)}(\underline{a}, t) = \gamma [a_3 + \beta(t)a_1^2]^2$ pour $a_3 \geq \beta(t)a_1^2$ et $B^{(L)}(\underline{a}, t) = 0$ pour $a_3 \leq \beta(t)a_1^2$. **22)** On a $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = U_3 \frac{\partial B}{\partial x_3} = 2\gamma\dot{\beta}(t)x_1^2 x_3/k^2(t)$. **23)** Les composantes de $\underline{D}(\underline{x}, t)$ sont $D_{11} = \dot{k}(t)/k(t)$, $D_{13} = D_{31} = \dot{\beta}(t)x_1/k^2(t)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **24)** Les trajectoires $\underline{x}(t)$ telles que $\underline{x}(0) = \underline{a}$ sont des paraboles d'équation $x_1 = a_1 + 2\alpha(x_3 - a_3)^2 / (\beta_0^2 a_1^3)$. Le tracé de la trajectoire, d'équation $x_1 = 1 + .5[1 - \cos(\pi t/2)]$ cm et $x_3 = 1 + \sin(\pi t/4)$ est donc le morceau de parabole DR de la figure 9.1b). **25)** Le taux de dilatation $\text{div } \underline{U} = \dot{k}(t)/k(t)$ ne dépend pas du point de départ de la trajectoire. **26)** Le vecteur rotation est $\underline{\omega}(\underline{x}, t) = -\dot{\beta}(t)x_1/k^2(t)\underline{e}^{(2)}$. **27)** Les lignes de champs à $t = t_*$ sont définies par $dx_1/U_1 = dx_3/U_3$ ce qui entraîne $dx_3/dx_1 = U_3/U_1 = \dot{\beta}(t_*)x_1 / [\dot{k}(t_*)k(t_*)]$ en choisissant de les paramétrer par la variable x_1 . Ces lignes sont alors des paraboles d'équations $x_3 = \dot{\beta}(t_*)x_1^2 / [2\dot{k}(t_*)k(t_*)] + b_3$ où b_3 est une constante. **28)** La loi de conservation de la masse s'écrit $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} = 0$ avec $\text{div } \underline{U} = \dot{k}(t)/k(t)$. **29)** Comme $\frac{d\rho}{dt}/\rho = -\dot{k}(t)/k(t)$, on peut écrire $\frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)/\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = -\dot{k}(t)/k(t)$ et donc $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = C/k(t)$ où C est une constante. En utilisant la condition initiale $\rho(\underline{a}, 0) = \rho_0$ et le fait que $k(0) = 1$, on obtient $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0/k(t)$. **30)** Ce

résultat peut se trouver directement en remarquant que $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 J(\underline{a}, t)$ avec $J(\underline{a}, t) = k(t)$. **31**) On a $\mathcal{B}(0) = \int_0^l da_2 \int_{-l}^l da_1 \int_0^l \gamma a_3^2 da_3 = \frac{2}{3} \gamma l^5$.

PARTIEL 2005

PROBLÈME 9.3

 Chat dans un écoulement parabolique

On considère, dans ce problème, une longueur de référence d que l'on prendra égale à 1 cm pour les tracés graphiques. La valeur numérique d'une deuxième longueur, notée l , n'est pas précisée ici. Étant données trois longueurs X , Y et L , on définit le domaine $\Omega_0(X, Z, L)$ par :

$$\Omega_0(X, Z, L) = \left\{ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{l} 0 \leq a_2 \leq l, \quad |a_1 - X| \leq L \\ \text{et} \quad \frac{(a_1 - X)^2}{L} \leq a_3 - Z \leq \frac{3}{4}L + \frac{(a_1 - X)^2}{4L} \end{array} \right\}$$

- 1) Sur un même graphique, tracer la projection dans le plan (a_1, a_3) des domaines $\Omega_0(0, 0, 4d)$, $\Omega_0(-2d, 2d, d/2)$, $\Omega_0(2d, 2d, d/2)$ et $\Omega_0(0, d/2, d)$.

Champ de vitesse

On considère un mouvement défini par sa représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ dont les composantes sont $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ et $U_3 = \beta (16d^2 - x_1^2)$ où β est une constante positive qui prendra la valeur $\beta = \frac{1}{16} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ dans pour les tracés graphiques.

- 2) Calculer l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t)$.
- 3) Calculer $\underline{D}(\underline{x}, t)$ pour les points \underline{x} tels que $x_1 = 2d$.
- 4) Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ pour ces mêmes points.
- 5) Tracer le profil de vitesse U_3 en fonction de x_1 .
- 6) Calculer la trajectoire $\underline{x}(t)$ issue du point $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
- 7) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$.
- 8) Donner l'expression du mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$.
- 9) En déduire l'expression du mouvement inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$.
- 10) Donner l'expression de la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ de vitesse.

Déformée du chat

- 11) Montrer que la projection dans le plan (x_1, x_3) de l'image $\Omega_t(X, Z, L)$ au temps t de configuration de référence $\Omega_0(X, Z, L)$ est une surface comprise en deux courbes que l'on explicitera. On pourra noter $\gamma = \beta t$.
- 12) Sur le même graphique, tracer précisément la projection, dans le plan (x_1, x_3) , du domaine déformé $\Omega_t(0, 0, 4d)$ pour $t = 4$ s.

- 13) Tracer précisément la projection, dans le plan (x_1, x_3) , du domaine déformé $\Omega_t(0, d/2, d)$ pour $t = 4$ s.
- 14) Toujours sur le même graphique, tracer schématiquement et sans calculs la projection dans le plan (x_1, x_3) des domaines déformés $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$ et $\Omega_t(-2d, 2d, d/2)$ pour $t = 4$ s.
- 15) Donner l'expression $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la représentation lagrangienne du champ B dont la représentation eulérienne est $B(\underline{x}, t) = \alpha x_1^2$ où α est un constante.
- 16) On note $\mathcal{D}(t) = \Omega_t(0, 0, 4d)$ et $\mathcal{B}(t) = \iint_{\mathcal{D}(t)} B(\underline{x}, t) d^3x$. Calculer $\mathcal{B}(0)$.
- 17) Calculer $\frac{d}{dt}\mathcal{B}(t)$.
- 18) En déduire $\mathcal{B}(t)$ pour tout temps t .

Grande déformation

On considère la grande déformation $\underline{X}(\underline{a})$ définie par ses composante $X_1 = a_1$, $X_2 = a_2$ et $X_3 = a_3 + \gamma(16d^2 - a_1^2)$ avec $d = 1$ cm et $\gamma = \frac{1}{4}$ cm⁻¹.

- 19) Quel lien existe-t-il entre cette grande déformation $\underline{X}(\underline{a})$ et le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ des questions précédentes.
- 20) Calcul le gradient de la déformation $\underline{F}(\underline{a})$ pour $\underline{a} = 2d(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.
- 21) En déduire le tracé des images respectives des petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a \underline{e}^{(3)}$ pris autour du point $\underline{a} = 2d(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.
- 22) En déduire un tracé schématique de $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$ pour $t = 4$ s.
- 23) Calculer le volume du domaine $\Omega_0(0, 0, 4d)$.
- 24) En déduire le volume du domaine $\Omega_t(0, 0, 4d)$ pour $t = 4$ s.
- 25) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a})$ pour $\underline{a} = 2d(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.
- 26) En déduire l'angle de glissement des directions $\underline{e}^{(1)}$ et $\underline{e}^{(3)}$. Comparer avec le résultat d'une des questions précédentes.
- 27) En déduire la dilatation relative des petits vecteurs orienté dans la direction $\underline{e}^{(3)}$.
- 28) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{0})$ obtenus pour $\underline{a} = \underline{0}$.
- 29) Comparer avec le tracé de $\Omega_t(0, d/2, d)$.

Corrigé page 20

Corrigé Chat dans un écoulement parabolique

1) En projection dans le plan (a_1, a_3) , le domaine $\Omega_0(0, 0, L)$ est compris au-dessus d'un morceau de parabole reliant les points $(-L, L)$, $(0, 0)$ et (L, L) , et au-dessous d'un morceau de parabole reliant les points $(-L, L)$, $(0, 3L/4)$ et (L, L) , ce qui ressemble à un croissant inscrit dans un carré de côté $2L$. Le domaine $\Omega_0(X, Y, L)$ s'obtient à partir de $\Omega_0(0, 0, L)$ par une translation de vecteur $(X, 0, L)$. Le tracé des quatre ensembles indiqués ressemble à une tête de chat (voir figure) inscrit dans un parallépipède rectangle dont la projection dans le plan (a_1, a_3) est un carré de côté $8d$.

Champ de vitesse

2) Comme $\frac{\partial U}{\partial t} = \underline{0}$, $U_1 = U_2 = 0$ et $\frac{\partial U}{\partial x_3} = \underline{0}$, on a $\frac{dU}{dt} = \underline{0}$. 3) Les composantes K_{ij} du gradient des vitesses \underline{K} sont toutes nulles sauf $K_{31} = -2\beta x_1$. On en déduit que les composantes D_{ij} sont toutes nulles sauf $D_{13} = D_{31} = -\beta x_1$, qui valent $D_{13} = D_{31} = -2\beta d$ au point indiqué. 4) Les composantes du tenseur des rotations $\underline{\Omega}$ sont toutes nulles sauf $\Omega_{13} = -\Omega_{31} = \beta x_1$. En utilisant la relation $\Omega_{31} + \omega_2 = 0$, on en déduit $\underline{\omega} = \beta x_1 \underline{e}^{(2)}$ qui vaut $\underline{\omega} = 2\beta d$ au point indiqué. 5) Le profil de vitesse $U_3(x_1)$ est celui d'une parabole qui s'annule pour $|x_1| = 4d$ et est maximum pour $x_1 = 0$. 6) L'équation de la trajectoire est $\underline{x}(t) = \underline{a} + \beta(16d^2 - a_1^2)t \underline{e}^{(3)}$. Ces trajectoires forment des droites parallèles à $\underline{e}^{(3)}$. 7) Comme le champ de vitesse est stationnaire, lignes de champ et trajectoires sont confondues. 8) On a $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \beta(16d^2 - a_1^2)t \underline{e}^{(3)}$. 9) On en déduit $\underline{A}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \beta(16d^2 - x_1^2)t \underline{e}^{(3)}$. 10) On a $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \beta(16d^2 - a_1^2)$.

Déformée du chat

11) La projection de $\Omega_t(X, Z, L)$ dans le plan (x_1, x_3) est comprise au-dessus de la parabole d'équation $x_3 = Z + \gamma(16d^2 - x_1^2) + (x_1 - X)^2/L$, qui s'écrit aussi $x_3 - \left(Z + 16\gamma d^2 + \frac{X^2}{L}\right) = \left(\frac{1}{L} - \gamma\right)x_1^2 - \frac{2X}{L}x_1$ et en-dessous de la parabole d'équation aussi $x_3 - \left(Z + 16\gamma d^2 + \frac{X^2}{4L} + \frac{3L}{4}\right) = \left(\frac{1}{4L} - \gamma\right)x_1^2 - \frac{2X}{L}x_1$. 12) La projection de $\Omega_t(0, 0, 4d)$ est la surface au-dessus de la parabole $x_3 - 16\gamma d^2 = \left(\frac{1}{4d} - \gamma\right)x_1^2$ et au-dessous de la parabole $x_3 - 16\gamma d^2 - 3d = \left(\frac{1}{16d} - \gamma\right)x_1^2$. En utilisant les valeurs numériques de β , t et d qui conduisent à $\gamma = \frac{1}{4} \text{ cm}^{-1}$ et $d = 1 \text{ cm}$, ces équations s'écrivent respectivement $x_3 = 4 \text{ cm}$ et $x_3 - 7 \text{ cm} = -3 \text{ cm} \left(\frac{x_1}{4 \text{ cm}}\right)^2$. La surface est au-dessus de la droite $x_3 = 4 \text{ cm}$ et en-dessous de la parabole concave passant par $(-4, 4)$, $(0, 7)$ et $(4, 4)$ (en cm). 13) L'application numérique montre que la projection de l'image de $\Omega_t(0, d/2, d)$ est au-dessus de la parabole $x_3 - 4.5 \text{ cm} = 0.75 \text{ cm} \left(\frac{x_1}{1 \text{ cm}}\right)^2$ et en-dessous de la droite $x_3 = 5.25 \text{ cm}$. 14) Le tracé de la forme des "yeux du

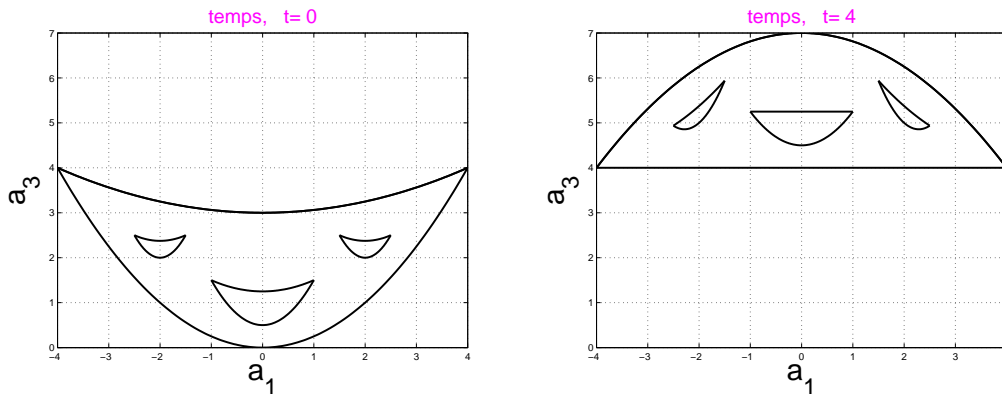


Figure 9.2: Domaines : a) avant déformation pour $t = 0$, b) au temps $t = 4 \text{ s}$.

chat” au temps $t = 4$ s se fait intuitivement en interpolant la déformation des “la tête” et “la bouche”. **15)** On a $B^{(L)}(\underline{a}, t) = \alpha a_1^2$. **16)** On a $\mathcal{B}(0) = \alpha l \int_{-4d}^{4d} a_1^2 \left(\int_{a_1^2/(4d)}^{3d+a_1^2/(16d)} da_3 \right) da_1 = \alpha l \int_{-4d}^{4d} \left(3da_1^2 + \frac{a_1^4}{16d} - \frac{a_1^4}{4d} \right) da_1 = \frac{256}{5} \alpha l d^4$. **17)** On a $\frac{d}{dt} \mathcal{B}(t) = \iint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dB}{dt} + B \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x = 0$ car $\frac{dB}{dt} = 0$ et $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. **18)** On en déduit que $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(0)$.

Grande déformation

19) On peut écrire $\underline{X}(\underline{a}) = \underline{X}(\underline{a}, \gamma/\beta)$. On s'intéresse à la grande déformation entre la configuration de référence à $t = 0$ et la configuration à $t = \gamma/\beta$, qui vaut $t = 4$ s pour l'application numérique. **20)** Seules les composantes $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{31} = -2\gamma a_1$ de $\underline{F}(\underline{a})$ sont non nulles. On a $F_{31} = -4\gamma d$ pour le point particulier indiqué. **21)** On a $\underline{\delta x} = \underline{F} \underline{\delta a} = \delta a (\underline{e}^{(1)} - 4\gamma d \underline{e}^{(3)})$ et $\underline{\delta x}' = \underline{F} \underline{\delta a}' = \delta a \underline{e}^{(3)}$. **22)** On a $\underline{\delta x} = \delta a (\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(3)})$. Comme la projection de $\Omega_0(2d, 2d, d/2)$ est inscrite dans le rectangle de sommets $(1.5d, 2d)$, $(1.5d, 2.5d)$, $(2.5d, 2.5d)$ et $(2.5d, 2d)$, on peut considérer, en considérant que $\delta a = d/2$ est petit (facteur 8 devant $4d$), celle de $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$ est inscrite dans le parallépipède de sommets $(1.5d, 2.5d)$, $(1.5d, 3d)$, $(2.5d, 2d)$ et $(2.5d, 1.5d)$. On en déduit le tracé approximatif de $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$. **23)** Le volume est $\mathcal{V}_0 = l \int_{-4d}^{4d} \int_{a_1^2/(4d)}^{3d+a_1^2/(16d)} da_1 da_3 = 16 d^2$. **24)** Comme $J(\underline{a}) = \det \underline{F}(\underline{a}) = 1$, les volumes sont conservés. Le volume de $\Omega_t(0, 0, 4d)$ est égal à $16d^2$ pour tout temps t . **25)** On en déduit que $C_{11} = 1 + 4\gamma a_1^2$, $C_{22} = C_{33} = 0$ et $C_{13} = C_{31} = -2\gamma a_1$ sont les seules composantes non nulles de $\underline{C}(\underline{a})$. **26)** On en déduit que $\sin \gamma_{13} = C_{13}/\sqrt{C_{11}C_{33}} = -2\gamma a_1/\sqrt{1 + 4\gamma a_1^2}$. Pour le point considéré, on obtient $\sin \gamma_{13} = -4\gamma d/\sqrt{1 + 16\gamma d^2}$. L'application numérique conduit à $\sin \gamma_{13} = -1/\sqrt{2}$ ce qui entraîne $\gamma_{13} = -\pi/4$. Ce résultat est conforme avec la réponse de la question 21. **27)** La dilatation relative dans la direction $\underline{e}^{(3)}$ est $\sqrt{C_{33}} = 1$. **28)** On a $\underline{C}(\underline{0}) = \underline{I}$. Il n'y a pas de déformation dans le voisinage de $\underline{0}$. **29)** On remarque que la déformation de la bouche du chat est faible, même si elle est visible à cause de sa taille finie.

PARTIEL 2004

Certaines questions du problème sont construites sous forme de “Questionnaire à Choix Multiples” (QCM) avec trois réponses possibles [(a), (b) ou (c)] suggérées dans un tableau. Pour chaque ligne, on justifiera la réponse choisie à l'aide d'une démonstration, succincte mais complète.

EXERCICE 9.5

 Calcul tensoriel axisymétrique 2D

On se place dans le plan $[\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}]$ en notant $x_1 = x$ et $x_2 = y$ les coordonnées. On note respectivement $B(\underline{x}) = B(x, y)$ et $\underline{V}(\underline{x}) = [V_1(x, y), V_2(x, y)]$ un champ scalaire ou un champ vectoriel bidimensionnel (2D). On note alors $\underline{\operatorname{grad}} B = \left(\frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial y} \right)$ le champ de vecteurs de composantes $\frac{\partial B}{\partial x_i}$ et $\underline{\operatorname{grad}} \underline{V}$ le

champ de matrices 2×2 de composantes $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$. Étant donnés deux champs de vecteurs $\underline{U}(\underline{x})$ et $\underline{V}(\underline{x})$ bidimensionnels, on note $\underline{A} = \underline{U} \otimes \underline{V}$ la matrice 2×2 de composantes $A_{ij} = U_i V_j$. On note $R(\underline{x}) = R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ le champ scalaire 2D appelé “rayon”. On note enfin $\underline{e}_r(\underline{x}) = \frac{1}{R(\underline{x})} \underline{x} = \frac{1}{R(x,y)}(x, y)$ et $\underline{e}_\theta(\underline{x}) = \frac{1}{R(\underline{x})} \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x} = \frac{1}{R(x,y)}(-y, x)$ deux champs de vecteurs unitaires 2D respectivement appelés “vecteur unitaire radial” et “vecteur unitaire azimuthal”.

- 1) Choisir la bonne expression de chacun des champs de la colonne de gauche du tableau 1.

	(a) :=	(b) :=	(c) :=
$\underline{\text{grad}}(B^n)$	$n B^{n-1} \underline{\text{grad}} B$	$n B^{n-1} \underline{\underline{\text{grad}}} B$	$n B^n \underline{\underline{\text{grad}}} B$
$\underline{\text{grad}}(B \underline{V})$	$\underline{\text{grad}} B \otimes \underline{V}$	$\underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + \underline{B} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{V}$	$B \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{V}$
${}^t(\underline{U} \otimes \underline{V})$	$\underline{V} \otimes \underline{U}$	$\underline{U} \otimes \underline{V}$	$\underline{U} \cdot \underline{V}$
$(\underline{U} \otimes \underline{V}) \underline{W} =$	$(\underline{U} \cdot \underline{V}) \underline{W}$	$(\underline{U} \cdot \underline{W}) \underline{V}$	$(\underline{V} \cdot \underline{W}) \underline{U}$
$\underline{\text{grad}}[F(B)]$	$F'(B) \underline{\text{grad}} B$	$F'(B) \otimes \underline{\text{grad}} B$	$F'(B) \underline{\underline{\text{grad}}} B$

Table 9.1: Calcul de cinq expressions de champs

- 2) Choisir la bonne expression de $\underline{\text{grad}} B$ dans le tableau 2.
- 3) Choisir la bonne expression de chacun des champs de la colonne de gauche du tableau 3.
- 4) Choisir la bonne expression de $\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{V}$ dans le tableau 4.
- 5) Choisir la bonne expression de $\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{V}$ dans le tableau 5.

La suite du partiel était constituée des questions 2 à 14 de l'examen 2004 regroupées sous le titre “Tourbillons en repère tournant”.

EXERCICE 9.6 Accélération de Coriolis

On note $\beta(t) = \Omega(t - t_*)$ où t est le temps et t_* une constante. On appelle “mouvement d’entraînement” l’application $\underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t)$ définie par

$$\underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t) = \underline{R}[\beta(t)] \underline{a} \quad \text{avec} \quad \underline{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle “mouvement relatif” l’application qui associe à tout point \underline{a} une matrice colonne notée $\underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t)$ et de composantes $X_i^{(\text{rel})}(\underline{a}, t)$. On appelle enfin “mouvement absolu” le mouvement défini par

$$\underline{X}^{(\text{abs})}(\underline{a}, t) = \underline{R}[\beta(t)] \underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t).$$

- 1) Calculer les composantes de la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(\text{ent})(L)}(\underline{a}, t)$ du champ de vitesse d’entraînement.
- 2) En déduire que la représentation eulérienne de ce champ de vitesse s’écrit $\underline{U}^{(\text{ent})}(\underline{x}, t) = \Omega \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x}$.

B	(a) : $\underline{\text{grad}} B =$	(b) : $\underline{\text{grad}} B =$	(c) : $\underline{\text{grad}} B =$
\underline{x}^2	$2 \underline{x}$	$\underline{e}_r(\underline{x})$	$\ \underline{x}\ \underline{\text{grad}} \ \underline{x}\ $
$R^2(\underline{x})$	$\underline{e}_r(\underline{x})$	$\ \underline{x}\ \underline{\text{grad}} \ \underline{x}\ $	$2 \underline{x}$
$R^{2n}(\underline{x})$	$2n R^{2n-1} \underline{e}_r(\underline{x})$	$2n R^{2n-1} \underline{x}$	$2n R^{2n-1} \underline{e}_\theta(\underline{x})$
$R(\underline{x})$	\underline{x}	$\underline{e}_r(\underline{x})$	$\frac{1}{2} \underline{e}_r(\underline{x})$
$F[R(\underline{x})]$	$F'[R(\underline{x})] \underline{e}_r(\underline{x})$	$F'[R(\underline{x})] \underline{x}$	$F'[R(\underline{x})] \underline{e}_\theta(\underline{x})$

Table 9.2: Calcul de $\underline{\text{grad}} B$ pour cinq champs $B(\underline{x})$

	(a) : =	(b) : =	(c) : =
$R^2 \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$	$\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$
$R^2 \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$	$\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$
$R^2 \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$	$\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$
$R^2 \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$	$\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$
$\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$	$2 \underline{I}$	$-\underline{I}$	\underline{I}

Table 9.3: Calcul de cinq expressions de champs de tenseurs

\underline{V}	(a) : $\underline{\text{grad}} \underline{V} =$	(b) : $\underline{\text{grad}} \underline{V} =$	(c) : $\underline{\text{grad}} \underline{V} =$
\underline{x}	$\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$	\underline{I}	$\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$
$R^n \underline{x}$	$R^n (n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{I})$	$(n+1) R^n \underline{I}$	$n R^{n-1} \underline{I}$
$R^{n+1} \underline{e}_r$	$(n+1) R^n \underline{I}$	$n R^{n-1} \underline{I}$	$R^n (n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{I})$
\underline{e}_r	$\frac{1}{R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$	$\frac{1}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$	$\frac{1}{R} \underline{I}$
$F(R) \underline{e}_r$	$F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{R} F(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$	$F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{R} F(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$	$F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{R} F(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$

Table 9.4: Calcul de $\underline{\text{grad}} \underline{V}$ pour cinq champs $\underline{V}(\underline{x})$

\underline{V}	(a) : $\underline{\text{grad}} \underline{V} =$	(b) : $\underline{\text{grad}} \underline{V} =$	(c) : $\underline{\text{grad}} \underline{V} =$
$R \underline{e}_\theta$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$R^{n+1} \underline{e}_\theta$	$n R^n \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + R^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$n R^{n-1} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + R^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$n R^n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + R^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$R^{n+1} \underline{e}_\theta$	$\begin{pmatrix} \frac{-nxy}{R^{2-n}} & \frac{nx^2}{R^{2-n}} \\ \frac{-ny^2}{R^{2-n}} & \frac{nxy}{R^{2-n}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-nxy}{R^{2-n}} & \frac{-x^2-(n+1)y^2}{R^{2-n}} \\ \frac{(n+1)x^2+y^2}{R^{2-n}} & \frac{nxy}{R^{2-n}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{nxy}{R^{2-n}} & \frac{y^2}{R^{2-n}} \\ \frac{ny^2}{R^{2-n}} & \frac{nxy}{R^{2-n}} \end{pmatrix}$
\underline{e}_θ	$-\frac{1}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$	$-\frac{1}{R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$	$-\frac{1}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$
$F(R) \underline{e}_\theta$	$F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$	$F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$	$F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$

Table 9.5: Calcul de $\underline{\text{grad}} \underline{V}$ pour cinq champs $\underline{V}(\underline{x})$

- 3) Montrer que le tenseur des taux de rotation associé au champ de vitesse d'entraînement est un tenseur $\underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})}$ constant. Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}^{(\text{ent})}$ constant associé.
- 4) Montrer, en comparant les représentations eulérienne et lagrangienne du champ de vitesse d'entraînement, que l'on a $\frac{d}{dt}\underline{R}[\beta(t)] = \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{R}[\beta(t)]$.
- 5) Exprimer la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(\text{abs})(L)}(\underline{a}, t)$ de la vitesse absolue en fonction de $\underline{R}[\beta(t)]$, $\underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})}$, $\underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t)$ et la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(\text{rel})(L)}(\underline{a}, t)$ du mouvement relatif.
- 6) On note respectivement $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})(L)}(\underline{a}, t)$ et $\underline{\Gamma}^{(\text{rel})(L)}(\underline{a}, t)$ les représentations lagrangiennes des accélérations des mouvements absolus et relatifs. Montrer que

$$\underline{\Gamma}^{(\text{abs})(L)} = \underline{R}(\beta) \underline{\Gamma}^{(\text{rel})(L)} + 2 \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{R}(\beta) \underline{U}^{(\text{rel})(L)} + \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{R}(\beta) \underline{X}^{(\text{rel})}.$$

- 7) On note respectivement $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})}(\underline{x}, t)$ et $\underline{\Gamma}^{(\text{rel})}(\underline{x}, t)$ les représentations eulériennes des accélérations des mouvements absolus et relatifs. On suppose que $\underline{X}^{(\text{abs})}(\underline{a}, t_*) = \underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t_*) = \underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t_*) = \underline{a}$. Montrer que l'on a alors

$$\underline{\Gamma}^{(\text{abs})}(\underline{x}, t_*) = \underline{\Gamma}^{(\text{rel})}(\underline{x}, t_*) + 2 \underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{U}^{(\text{rel})}(\underline{x}, t_*) + \underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge (\underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{x}).$$

- 8) Donner un argument permet de généraliser cette relation vraie pour $t = t_*$ à toutes les valeurs de temps $t = t'$.
- 9) En notant $\left(\frac{d}{dt}\right)^{(\text{abs})} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}^{(\text{abs})} \cdot \underline{\text{grad}}$ et $\left(\frac{d}{dt}\right)^{(\text{rel})} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}^{(\text{rel})} \cdot \underline{\text{grad}}$, conclure en justifiant la relation

$$\left(\frac{d\underline{U}^{(\text{abs})}}{dt}\right)^{(\text{abs})} = \left(\frac{d\underline{U}^{(\text{rel})}}{dt}\right)^{(\text{rel})} + 2 \underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{U}^{(\text{rel})} - \underline{\text{grad}} \left[\frac{(\underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{x})^2}{2} \right].$$

- 10) Relier l'approche de ce problème à la notion de "points coïncidants" habituellement invoquée pour définir l'accélération de Coriolis.

Corrigé page 25

Corrigé Calcul tensoriel et rotation

Calcul tensoriel axisymétrique

1)[abaca].

(a) : $\underline{\text{grad}}(B^n) = n B^{n-1} \underline{\text{grad}} B$ car $\frac{\partial}{\partial x_i}(B^n) = n B^{n-1} \frac{\partial B}{\partial x_i}$.

(b) : $\underline{\text{grad}}(B \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$ car $\frac{\partial}{\partial x_j}(B V_i) = V_i \frac{\partial B}{\partial x_j} + B \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$.

(a) : ${}^t(\underline{U} \otimes \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{U}$ car ses composantes sont $V_j U_i$.

(c) : $(\underline{U} \otimes \underline{V}) \underline{W} = (\underline{V} \cdot \underline{W}) \underline{U} = U_i V_j W_j$.

(a) : $\underline{\text{grad}}[F(B)] = F'(B) \underline{\text{grad}} B$ car $\frac{\partial}{\partial x_i}[F(B)] = F'(B) \frac{\partial B}{\partial x_i}$.

2)[acaba].

(a) : $\underline{\text{grad}}(\underline{x}^2) = 2 \underline{x}$ car $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j x_j) = 2 \delta_{ij} x_j = 2 x_i$.

- (c) : $\underline{\text{grad}} [R^2(\underline{x})] = 2 \underline{x}$ car $R^2 = \underline{x}^2$.
- (a) : $\underline{\text{grad}} [R^{2n}(\underline{x})] = 2n R^{2n-1} \underline{e}_r(\underline{x})$ en utilisant $\underline{\text{grad}} (B^n) = n B^{n-1} \underline{\text{grad}} B$ avec $B = R^2$ et $\underline{x} = R\underline{e}_r$.
- (b) : $\underline{\text{grad}} [R(\underline{x})] = \underline{e}_r(\underline{x})$ en posant $n = \frac{1}{2}$.
- (a) : $\underline{\text{grad}} (F[R(\underline{x})]) = F'[R(\underline{x})] \underline{e}_r(\underline{x})$ car $\underline{\text{grad}} [F(B)] = F'(B) \underline{\text{grad}} B$.
- 3)**[babac].
- (b) : $R^2 \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r = (x, y) \otimes (x, y) = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$.
- (a) : $R^2 \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta = (x, y) \otimes (-y, x) = \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$.
- (b) : $R^2 \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r = (-y, x) \otimes (x, y) = \begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}$.
- (a) : $R^2 \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta = (-y, x) \otimes (-y, x) = \begin{pmatrix} y^2 & -x^2y \\ -xy & x^2y \end{pmatrix}$.
- (c) : $\underline{\text{grad}} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) = \underline{I}$ en additionnant les deux matrices.
- 4)**[bacab].
- (b) : $\underline{\text{grad}} (\underline{x}) = \underline{I}$ car $\underline{x} = (x, y)$.
- (a) : $\underline{\text{grad}} (R^n \underline{x}) = R^n (n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{I})$ en appliquant la relation $\underline{\text{grad}} (B \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$.
- (c) : $\underline{\text{grad}} (R^{n+1} \underline{e}_r) = R^n (n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{I})$ en remarquant que $R \underline{e}_r = \underline{x}$ et appliquant la relation précédent.
- (a) : $\underline{\text{grad}} (\underline{e}_r) = \frac{1}{R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ en posant $n = -1$ et en utilisant $\underline{I} = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$.
- (b) : $\underline{\text{grad}} [F(R) \underline{e}_r] = F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{R} F(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ en utilisant la relation $\underline{\text{grad}} (B \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$.
- 5)**[cabab].
- (c) : $\underline{\text{grad}} (R \underline{e}_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ car $R \underline{e}_\theta = (-y, x)$.
- (a) : $\underline{\text{grad}} (R^{n+1} \underline{e}_\theta) = n R^n \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + R^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en appliquant la relation $\underline{\text{grad}} (B \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$.
- (b) : $\underline{\text{grad}} (R^{n+1} \underline{e}_\theta) = \begin{pmatrix} \frac{-nxy}{R^{2-n}} & \frac{-x^2-(n+1)y^2}{R^{2-n}} \\ \frac{(n+1)x^2+y^2}{R^{2-n}} & \frac{nxy}{R^{2-n}} \end{pmatrix}$ en remplaçant $\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$ par son expression matricielle.
- (a) : $\underline{\text{grad}} (\underline{e}_\theta) = -\frac{1}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$ en posant $n = -1$ et en utilisant l'expression matricielle de $\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$.
- (b) : $\underline{\text{grad}} [F(R) \underline{e}_\theta] = F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$ en utilisant la relation $\underline{\text{grad}} (B \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$.

Corrigé

Accélération de Coriolis

1) L'expression lagrangienne $\underline{U}^{(\text{ent})(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t)$ de la vitesse d'entraînement a pour composantes $\underline{U}_1^{(\text{ent})(L)} = -\Omega(a_1 \sin \beta + a_2 \cos \beta)$, $\underline{U}_2^{(\text{ent})(L)} = \Omega(a_1 \cos \beta - a_2 \sin \beta)$ et $\underline{U}_3^{(\text{ent})(L)} = 0$. **2)** On en déduit $\underline{U}_1^{(\text{ent})(L)} = -\Omega X_1^{(\text{ent})}$, $\underline{U}_2^{(\text{ent})(L)} = \Omega X_2^{(\text{ent})}$, d'où $\underline{U}_1^{(\text{ent})}(\underline{x}, t) = -\Omega x_2$, $\underline{U}_2^{(\text{ent})}(\underline{x}, t) = \Omega x_1$ et $\underline{U}_3^{(\text{ent})}(\underline{x}, t) = 0$, ce qui s'écrit $\underline{U}^{(\text{ent})}(\underline{x}, t) = \Omega \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x}$. **3)** On a $\underline{\omega}^{(\text{ent})}(\underline{x}) = \Omega \underline{e}^{(3)}$. On en déduit que la matrice associée $\underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})}$ est constante. **4)** On a $\underline{U}^{(\text{ent})}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{x}$. On a donc $\underline{U}^{(\text{ent})(L)}(\underline{a}, t) = \underline{U}^{(\text{ent})}[\underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t), t] = \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t) = \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{R}[\beta(t)] \underline{a}$. L'égalité $\underline{U}^{(\text{ent})(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{X}^{(\text{ent})}(\underline{a}, t) = \frac{d}{dt} \underline{R}[\beta(t)] \underline{a}$ et l'expression précédente conduisent à $\frac{d}{dt} \underline{R}[\beta(t)] = \underline{\underline{\Omega}}^{(\text{ent})} \underline{R}[\beta(t)]$. On peut

aussi vérifier directement cette relation à partir de l'expression de \underline{R} . **5)** On a $\underline{U}^{(\text{abs})^{(L)}}(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{X}^{(\text{abs})}(\underline{a}, t) = \underline{R}[\beta(t)] \frac{\partial}{\partial t} \underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t) + \frac{d}{dt} \underline{R}[\beta(t)] \underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t) = \underline{R}[\beta(t)] \underline{U}^{(\text{rel})^{(L)}}(\underline{a}, t) + \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{R}[\beta(t)] \underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t)$.

6) L'accélération $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})}(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}^{(\text{abs})^{(L)}}(\underline{a}, t) = \underline{R}[\beta(t)] \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}^{(\text{rel})^{(L)}}(\underline{a}, t) + \frac{d}{dt} \underline{R}[\beta(t)] \underline{U}^{(\text{rel})^{(L)}}(\underline{a}, t) + \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{R}[\beta(t)] \frac{\partial \underline{X}^{(\text{rel})}}{\partial t}(\underline{a}, t) + \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \frac{d}{dt} \underline{R}[\beta(t)] \underline{X}^{(\text{rel})}(\underline{a}, t)$ est $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})^{(L)}} = \underline{R}(\beta) \underline{\Gamma}^{(\text{rel})^{(L)}} + 2 \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{R}(\beta) \underline{U}^{(\text{ent})^{(L)}} + \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{R}(\beta) \underline{X}^{(\text{rel})}$.

7) Comme $B^{(L)}(\underline{a}, t, t_*) = B[\underline{X}(\underline{a}, t_*), t_*] = B[\underline{a}, t_*]$ pour tout champ B et pour les trois mouvements \underline{X} du problème, on peut écrire $B(\underline{x}, t_*) = B^{(L)}(\underline{x}, t_*)$. On en déduit $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})} = \underline{\Gamma}^{(\text{rel})} + 2 \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{U}^{(\text{rel})} + \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{\Omega}^{(\text{ent})} \underline{x}$ et donc $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})} = \underline{\Gamma}^{(\text{rel})} + 2 \underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{U}^{(\text{rel})} + \underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge (\underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{x})$.

8) Pour un temps t quelconque que l'on note t' , on considère des descriptions des trois mouvements (absolu, relatif et d'entraînement) telles que les trois configurations de référence coïncident à l'instant t' . L'expression eulérienne de l'accélération absolue est reliée aux expressions eulériennes des autres champs avec les mêmes relations que celle de l'instant t_* .

9) Comme l'accélération absolue s'écrit $\underline{\Gamma}^{(\text{abs})} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\text{abs})} \underline{U}^{(\text{abs})}$, $\underline{\Gamma}^{(\text{rel})} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\text{rel})} \underline{U}^{(\text{rel})}$ et que $\underline{e}^{(3)} \wedge (\underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x}) = -x_1 \underline{e}^{(1)} - x_2 \underline{e}^{(2)} = \frac{1}{2} \text{grad} [(\underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x})^2]$, on a finalement $\left(\frac{d}{dt}\right)^{(\text{abs})} \underline{U}^{(\text{abs})} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\text{rel})} \underline{U}^{(\text{rel})} + 2 \underline{\Omega} \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{U}^{(\text{ent})} - \text{grad} \left[\Omega^2 \frac{(\underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x})^2}{2} \right]$.

10) Ce problème a permis de justifier l'expression de l'accélération de Coriolis $2 \underline{\omega}^{(\text{ent})} \wedge \underline{U}^{(\text{rel})}$ et de l'accélération d'entraînement $\underline{\omega}^{(\text{rel})} \wedge (\underline{\omega}^{(\text{rel})} \wedge \underline{x})$. La notion de point coïncident invoquée pour le mécanisme du point correspond ici à la notion de "configuration de référence coïncidente" à l'instant t considéré.

PARTIEL 2003

Le partiel 2003 était constitué de l'exercice "Cisaillement triple" et du problème "Rotation dans les fluides".

EXERCICE 9.8

Cisaillement triple

On considère un petit cube de centre \underline{x} dans un milieu continu soumis à des contraintes. On effectue trois expériences (a), (b) et (c) respectivement caractérisées par les forces de contacts suivantes, σ_0 étant une constante :

(a)	$\underline{T}^{(a)}(\underline{x}, \underline{e}^{(1)}) = \underline{0}$	$\underline{T}^{(a)}(\underline{x}, \underline{e}^{(2)}) = \sigma_0 \underline{e}^{(3)}$	$\underline{T}^{(a)}(\underline{x}, \underline{e}^{(3)}) = \sigma_0 \underline{e}^{(2)}$
(b)	$\underline{T}^{(b)}(\underline{x}, \underline{e}^{(1)}) = \sigma_0 \underline{e}^{(3)}$	$\underline{T}^{(b)}(\underline{x}, \underline{e}^{(2)}) = \underline{0}$	$\underline{T}^{(b)}(\underline{x}, \underline{e}^{(3)}) = \sigma_0 \underline{e}^{(1)}$
(c)	$\underline{T}^{(c)}(\underline{x}, \underline{e}^{(1)}) = \sigma_0 \underline{e}^{(2)}$	$\underline{T}^{(c)}(\underline{x}, \underline{e}^{(2)}) = \sigma_0 \underline{e}^{(1)}$	$\underline{T}^{(c)}(\underline{x}, \underline{e}^{(3)}) = \underline{0}$

- 1) Exprimer les trois tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}^{(a)}(\underline{x})$, $\underline{\sigma}^{(b)}(\underline{x})$ et $\underline{\sigma}^{(c)}(\underline{x})$ correspondant aux trois expériences.
- 2) On effectue les trois expériences simultanément en superposant les trois

systèmes de forces. Exprimer les tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x})$ correspondant à cette nouvelle expérience.

- 3) Calculer les forces de contact exercées sur une petite surface normale à $\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)} + \underline{e}^{(3)}$ pour cette nouvelle expérience.
- 4) Calculer les forces de contact exercées sur une petite surface de normale \underline{n} si \underline{n} est normal à $\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)} + \underline{e}^{(3)}$.

PROBLÈME 9.9

Rotation dans les fluides

Mouvement de rotation solide

On considère un mouvement défini par sa représentation lagrangienne

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t) - a_2 \sin(\omega t), \quad x_2 = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad x_3 = a_3$$

où ω est une constante positive. On pourra utiliser la notation $\underline{\mathcal{R}}(\alpha)$ pour désigner la matrice de la rotation d'axe $\underline{e}^{(3)}$ et d'angle α et $\underline{\mathcal{P}}$ pour désigner la projection orthogonale de l'espace sur le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

- 1) Calculer le tenseur des dilatations relatives $\underline{\mathcal{C}}(\underline{a}, t)$ de ce mouvement.
- 2) En déduire la valeur des taux de dilatation relatives $\Lambda(\underline{a}, \underline{da})$ et des angles de glissement $\gamma(\underline{a}, \underline{da}, \underline{da}')$ pour deux directions orthogonales.
- 3) On considère un milieu continu animé de ce mouvement et dont la masse volumique ρ_0 est homogène à $t = 0$. Calculer sa masse volumique pour tout temps $t > 0$. Que vaut le Jacobien $J(\underline{a}, t)$?
- 4) Calculer la représentation lagrangienne du champ de vitesse $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$.
- 5) Calculer la représentation lagrangienne du champ d'accélération $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t)$.
- 6) Montrer que pour tout temps t , la déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ s'exprime sous la forme $\underline{A}(\underline{x}, t) = \underline{\mathcal{G}}(t) \underline{x}$ où $\underline{\mathcal{G}}(t)$ est un tenseur homogène en espace.
- 7) En déduire la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse.
- 8) Calculer le tenseur des taux déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$.
- 9) Calculer le tenseur des taux de rotation $\underline{\Omega}(\underline{x}, t)$ ainsi que le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$.
- 10) Calculer la représentation eulérienne $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ de l'accélération en composant $\underline{\Gamma}^{(L)}$ et \underline{A} .
- 11) Calculer de nouveau $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ en explicitant $\frac{d}{dt} \underline{U}$.
- 12) Calculer enfin $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ en utilisant la relation

$$\frac{d}{dt} \underline{U} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}.$$

On définit les coordonnées polaires (R, Θ) par le changement de variables $(a_1, a_2) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$ et les coordonnées polaires (r, θ) par le changement de variable $(x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- 13) En écrivant le mouvement sous la forme $r = X_r(R, \Theta, t)$ et $\theta = X_\theta(R, \Theta, t)$, donner les expressions des fonctions X_r et X_θ .

On définit $\underline{e}_r(\theta) = \cos \theta \underline{e}^{(1)} + \sin \theta \underline{e}^{(2)}$ et $\underline{e}_\theta(\theta) = -\sin \theta \underline{e}^{(1)} + \cos \theta \underline{e}^{(2)}$. On note alors $\underline{U}(\underline{x}, t) = U_r(r, \theta, t) \underline{e}_r(\theta) + U_\theta(r, \theta, t) \underline{e}_\theta(\theta)$ le champ de vitesse.

- 14) Indiquer l'expression des fonctions U_r et U_θ pour le mouvement que l'on étudie.
- 15) Calculer l'accélération tangentielle $\Gamma_r(r, \theta, t)$ et l'accélération normale $\Gamma_\theta(r, \theta, t)$ pour ce mouvement.
- 16) Tracer les trajectoires associées à ce mouvement ainsi que les champs de vitesse \underline{U} et d'accélération $\underline{\Gamma}$.

Tourbillon ponctuel

On considère un nouveau mouvement défini par la représentation eulérienne de son champ de vitesse

$$U_1 = -B(x_1, x_2) x_2, \quad U_2 = B(x_1, x_2) x_1 \quad \text{et} \quad U_3 = 0$$

avec $B(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{2\pi} (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ où γ est une constante positive. Ce mouvement n'est donc défini que pour $\|x_1^2 + x_2^2\| > 0$.

- 17) Calculer le tenseur des taux de rotation $\underline{\Omega}(\underline{x}, t)$ et le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$. En déduire la valeur de $\text{rot } \underline{U}$.
- 18) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{D}(\underline{x}, t)$.
- 19) On considère un milieu continu animé de ce mouvement et dont la masse volumique ρ_0 est homogène à $t = 0$. Calculer sa masse volumique pour tout temps $t > 0$.
- 20) Exprimer l'accélération $\underline{\Gamma}$ en coordonnées cartésiennes.
- 21) Donner l'expression des composantes $U_r(r, \theta, t)$ et $U_\theta(r, \theta, t)$ du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t) = U_r \underline{e}_r(\theta) + U_\theta \underline{e}_\theta(\theta)$ en coordonnées polaires.
- 22) Exprimer l'accélération $\underline{\Gamma}$ en coordonnées polaires. En déduire une relation entre Γ_r et U_θ .
- 23) Donner l'expression de la représentation lagrangienne $r = X_r(R, \Theta, t)$ et $\theta = X_\theta(R, \Theta, t)$ de ce mouvement en coordonnées polaires et dans le plan $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)})$. En déduire l'expression du $\underline{X}(\underline{a}, t)$ de ce mouvement en coordonnées cartésiennes.
- 24) Tracer les trajectoires associées à ce mouvement ainsi que les champs de vitesse \underline{U} et d'accélération $\underline{\Gamma}$.
- 25) On considère le point $\underline{x}_* = r_* \underline{e}^{(2)}$. Calculer les valeurs propres du tenseur \underline{D} en ce point et tracer ses vecteurs propres dans le plan (x_1, x_2) .
- 26) En déduire, dans ce plan, le tracé schématique de l'image par le mouvement d'un petit cercle de centre \underline{x}_* au bout d'un laps de temps court.

Corrigé Cisaillement triple

1) On a $\underline{\sigma}^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\sigma}^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\underline{\sigma}^{(c)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) On a $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{(a)} + \underline{\sigma}^{(b)} + \underline{\sigma}^{(c)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$. **3)** Pour $\underline{m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on a $\underline{T}(\underline{x}, \underline{m}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{m} = 2\sigma_0 \underline{m}$. C'est un vecteur propre de $\underline{\sigma}(\underline{x})$. **4)** Les valeurs propres s de $\underline{\sigma}(\underline{x})$ sont les racines du polynôme $s^3 - 3s\sigma_0^2 - 2\sigma_0^3 = (s + \sigma_0)^2(s - 2\sigma_0)$. On retrouve la valeur propre $2\sigma_0$ associée à la direction \underline{m} . Comme $\underline{\sigma}(\underline{x})$ est symétrique, le plan perpendiculaire à \underline{m} est un espace propre, donc associée à la racine double $s = -\sigma_0$. Si \underline{n} est dans ce plan, on a $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = -\sigma_0 \underline{n}$.

Corrigé Rotation dans les fluides

Mouvement 2D

1) La jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{R}(\omega t)$ représente la

rotation d'axe $\underline{e}^{(3)}$ et d'angle ωt . Elle est indépendante de l'espace. Les déformations sont linéaires car elles s'écrivent $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{R}(\omega t) \underline{a}$. On en déduit $\underline{C} = {}^t \underline{F} \underline{F} = \underline{R}(-\omega t) \underline{R}(\omega t) = \underline{I}$. **2)** On a donc $\Lambda(\underline{a}, \underline{da}) = 1$ et $\gamma(\underline{a}, \underline{da}, \underline{da}') = 0$ en tous points et pour toutes directions. **3)** Comme $J(\underline{a}, t) = 1$, on a $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 / J(\underline{a}, t) = \rho_0$. La masse volumique est égale à ρ_0 pour tous temps. **4)** Comme $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{R}(\omega t) \underline{a}$, on a $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \dot{\underline{R}}(\omega t) \underline{a}$ avec $\dot{\underline{R}}(\omega t) = \omega \underline{P} \underline{R}(\omega t + \frac{\pi}{2})$. **5)** On obtient alors $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t) = \ddot{\underline{R}}(\omega t) \underline{a} = -\omega^2 \underline{P} \underline{R}(\omega t) \underline{a}$. **6)** On inverse $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{R}(\omega t) \underline{a}$ en $\underline{A}(\underline{x}, t) = \underline{G}(t) \underline{x}$ avec $\underline{G}(t) = \underline{R}(-\omega t)$. **7)** Comme $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t]$, on peut écrire $\underline{U}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{R}}(\omega t) \underline{A}(\underline{x}, t) = \omega \underline{P} \underline{R}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \underline{R}(-\omega t) \underline{x} = \omega \underline{P} \underline{R}(\frac{\pi}{2}) \underline{x} = \omega [-x_2 \underline{e}^{(1)} + x_1 \underline{e}^{(2)}]$. On a donc $U_1 = -\omega x_2$, $U_2 = \omega x_1$ et $U_3 = 0$. **8)** On vérifie que $\underline{D}(\underline{x}, t) = \underline{0}$. Il n'y a pas déformation. **9)** On a $\underline{\Omega}(\underline{x}, t) = \omega \underline{P} \underline{R}(\frac{\pi}{2})$ et $\underline{\omega} = \omega \underline{e}^{(3)}$. Le vecteur rotation est constant. C'est celui de la rotation solide. **10)** On a $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \underline{\Gamma}^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] = -\omega^2 \underline{P} \underline{R}(\omega t) \underline{R}(-\omega t) \underline{x} = -\omega^2 \underline{P} \underline{x} = -\omega^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$. **11)** Comme $\underline{\Gamma} = \frac{d}{dt} \underline{U} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U}$, que $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} = 0$ et $\underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U} = -\omega x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{U} + \omega x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{U} = -\omega^2 x_2 \underline{e}^{(2)} - \omega^2 x_1 \underline{e}^{(1)}$, on a bien $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = -\omega^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$. **12)** On a $\text{grad} \underline{U}^2 = \omega^2 \text{grad} (x_1^2 + x_2^2) = 2\omega^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$ et $\text{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} = 2 \underline{\omega} \wedge \underline{U} = 2 \omega \underline{e}^{(3)} \wedge (-\omega x_2 \underline{e}^{(1)} + \omega x_1 \underline{e}^{(2)}) = -2 \omega^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$. On retrouve donc bien $\underline{\Gamma} = \frac{1}{2} \text{grad} \underline{U}^2 + \text{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} = -\omega^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$. **13)** On établit facilement que le mouvement s'écrit $r = R$ et $\theta = \Theta + \omega t$. **14)** Le champ de vitesse en coordonnées polaires et en représentation eulérienne s'écrit $U_r = 0$ et $U_\theta = \omega r$. **15)** L'accélération en coordonnées polaires s'écrit $\Gamma_r = -\omega^2 r$ et

$\Gamma_\theta = 0$. **16)** Les trajectoires sont les cercles de centre $\underline{0}$. La vitesse pointe dans le sens trigonométrique ($\omega > 0$) et l'accélération vers le centre. La vitesse est nulle au centre et infinie à l'infini. C'est une rotation solide.

Tourbillon ponctuel

17) On a $\underline{K}(\underline{x}, t) = \frac{\gamma}{2\pi} (x_1^2 + x_2^2)^{-2} \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit

$\underline{\Omega} = \underline{0}$ et $\underline{\omega} = \underline{0}$. **18)** Comme le gradient des vitesses est un tenseur symétrique, on a $\underline{D}(\underline{x}, t) = \underline{K}(\underline{x}, t)$. **19)** On a $\text{div } \underline{U} = \text{tr } \underline{D} = 0$. On a donc $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$ pour tout temps. **20)** Un moyen rapide de calculer $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ consiste à écrire $\underline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2$ dans la mesure où $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} = \underline{0}$ et $\text{rot } \underline{U} = 2\underline{\omega} = \underline{0}$. Comme $\underline{U}^2 = \frac{\gamma^2}{4\pi^2} (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ on obtient $\underline{\Gamma} = -B^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$. **21)** On a $U_r = 0$ et $U_\theta(r, \theta, t) = \frac{\gamma}{2\pi r}$. **22)** On a $\Gamma_r = -\frac{\gamma^2}{4\pi^2 r^3}$ et $\Gamma_\theta = 0$. On a donc $\Gamma_r = -\frac{U_\theta^2}{2}$. **23)** On peut écrire $r = R$ et $\theta = \Theta + \frac{\gamma}{2\pi R} t$. On en déduit que $\underline{X}(\underline{a}, t)$ s'écrit $x_1 = a_1 \cos(\omega t) - a_2 \sin(\omega t)$, $x_2 = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$ et $x_3 = a_3$ avec $\omega(a_1, a_2) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$. **24)** Les trajectoires sont des cercles de centre $\underline{0}$, les vitesses pointent dans le sens trigonométrique ($\gamma > 0$), les accélérations vers le centre. La vitesse devient nulle à l'infini et infinie au centre. **25)** Le tenseur $\underline{D}(\underline{x}_*, t)$ vérifie $D_{12} = D_{21} = \frac{\gamma}{2\pi}$, $D_{ij} = 0$ sinon. Ses valeurs propres $(\frac{\gamma}{2\pi}, -\frac{\gamma}{2\pi}, 0)$ sont respectivement associées aux directions propres $(\underline{n}^{(+)}, \underline{n}^{(-)}, \underline{e}^{(3)})$ avec $\underline{n}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}^{(2)} \pm \underline{e}^{(1)})$. **26)** Un petit cercle centré en \underline{x}_* à $t = 0$ se déforme en une ellipse de grand axe $\underline{n}^{(+)}$ et de petit axe $\underline{n}^{(-)}$ au bout d'un petit temps. Les grandeurs $\pm \frac{\gamma}{2\pi}$ sont respectivement les vitesses de dilatation relatives (ou de compression) de ces axes.

PARTIEL 2002

Le partiel était constitué des questions 1 à 11 de l'exercice et "grande déformation" de l'examen ainsi que de l'exercice "Calculs sans efforts".

EXERCICE 9.10

Calculs sans efforts

En tout point \underline{x} d'un domaine Ω on suppose que les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur un élément de surface de normale \underline{n} vérifient les relations

$$\underline{T}[\underline{x}, \underline{e}^{(3)}] = \frac{\beta}{2} x_3^2 \underline{e}^{(3)}, \quad \underline{T}[\underline{x}, \underline{e}^{(2)}] \cdot \underline{e}^{(1)} = \frac{\beta}{2} x_3^2 \quad \text{et} \quad \underline{T}[\underline{x}, \underline{n}^{(1)}] = \frac{\beta}{2} \underline{x}^2 \underline{n}^{(1)}$$

où $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$, est un repère orthonormé, x_3 la troisième composante de \underline{x} dans ce repère et $\underline{n}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)})$ un vecteur unitaire. On suppose que la densité des forces extérieures de volume est $\underline{f}(\underline{x}) = -\beta \underline{x}$.

1) Quelle est la dimension du paramètre constant β ?

- 2) Exprimer toutes les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en fonction de \underline{x} .

On considère un sous-domaine \mathcal{D} qui a la forme d'un parallélépipède centré en $\underline{0}$ de cotés l_1 , l_2 et l_3 qui est donc défini par

$$\mathcal{D} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \leq \frac{l_1}{2}, |x_2| \leq \frac{l_2}{2} \text{ et } |x_3| \leq \frac{l_3}{2} \right\}. \quad (9.3)$$

- 3) Calculer l'expression de $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) = \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{x})$.
 4) Calculer la résultante $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{D}) = \underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) + \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ des forces extérieures de volume et des forces de contact extérieures à \mathcal{D} .
 5) Calculer le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D})$ en $\underline{0}$ des forces extérieures de volume.
 6) Calculer le moment $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ en $\underline{0}$ des forces de contact extérieures à \mathcal{D} .

On suppose qu'à l'instant considéré le domaine $\underline{\Omega}$ est animé d'un mouvement décrit par le champ de vitesse eulérien $\underline{U}(\underline{x}) = \alpha \underline{e}^{(1)}$ où α est une constante.

- 7) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D})$ des forces extérieures de volume.
 8) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ des forces de contact extérieures à \mathcal{D} .

Corrigé page 32

Corrigé Calculs sans efforts

1) La constante β est en N m^{-4} ou encore en Pa m^{-2} . 2) Les composantes du tenseur des contraintes sont $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\beta}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{33} = \frac{\beta}{2}x_3^2$ et $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$. 3) On obtient $\underline{f}_{\text{cont}} = \underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \beta \underline{x}$. 4) Comme $\underline{f}_{\text{cont}} + \underline{f} = \underline{0}$, on a $\underline{\mathcal{F}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$. 5) On a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f}(\underline{x}) d^3x = \underline{0}$ car $\underline{f} = -\beta \underline{x}$. 6) Comme $\underline{\sigma}$ est symétrique, on a $\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) d^3x = \underline{0}$ car $\underline{f}_{\text{cont}} = \beta \underline{x}$. 7) On a $\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x = -\alpha \beta l_2 l_3 \int_{-l_1/2}^{l_1/2} x_1 dx_1 = -\alpha \beta l_2 l_3 \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_{-l_1/2}^{l_1/2} = 0$. 8) On a $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \underline{f}_{\text{cont}} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} d^3x$. La première intégrale est nulle comme l'a montré le calcul de $\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D})$. La seconde intégrale est nulle dans la mesure où $\underline{D} = \underline{0}$. Donc $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = 0$.

PARTIEL 2001

Le partiel était constitué des parties "cinématique" et "grande déformation" de l'examen 2001 ainsi que de l'exercice "Contraintes de cisaillement".

EXERCICE 9.11 Contraintes de cisaillement

On considère la densité surfacique $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ des forces extérieures de contacts exercées sur une petite surface de normale \underline{n} par le milieu continu situé du

côté vers lequel pointe \underline{n} . On suppose que l'on a les relations suivantes :

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}^+) = \sigma^+ \underline{n}^+ \quad , \quad \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}^-) = \sigma^- \underline{n}^- \quad \text{et} \quad \underline{T}(\underline{x}, \underline{e}^{(2)}) = \underline{0} \quad (9.4)$$

avec $\underline{n}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$ et $\underline{n}^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$ et où σ^+ et σ^- sont des constantes.

- 1) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x})$ dans le cas $\sigma^+ = \sigma_0$ et $\sigma^- = -\sigma_0$.
- 2) Dessiner dans ce cas les forces surfaciques exercées sur les faces d'un petit cube de centre \underline{x} et dont les côtés sont parallèles aux directions de la base canonique. Interpréter ce système de contraintes.
- 3) Re-itérer cette question dans le cas où $\sigma^+ = 4 \sigma_0$ et $\sigma^- = -2 \sigma_0$.

Corrigé page 33

Corrigé

Contraintes de cisaillement

1) On a $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma^+ + \sigma^-)$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{1}{2} (\sigma^+ - \sigma^-)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. Dans le cas $\sigma^+ = \sigma_0$ et $\sigma^- = -\sigma_0$, on a $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$ et $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_0$.
 2) Les forces surfaciques sont parallèles aux côtés du cube. Elles exercent un cisaillement. En effet, $\underline{T}(\underline{x}, \underline{e}^{(1)}) = \underline{e}^{(3)}$ et $\underline{T}(\underline{x}, \underline{e}^{(3)}) = \underline{e}^{(1)}$.
 3) Dans le cas $\sigma^+ = 4 \sigma_0$ et $\sigma^- = -2 \sigma_0$, on a $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_0$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 3 \sigma_0$. Les contraintes exercées sur les faces de normales $\underline{e}^{(1)}$ et $\underline{e}^{(3)}$ sont respectivement $\underline{T}(\underline{x}, \underline{e}^{(1)}) = \sigma_0 (\underline{e}^{(1)} + 3 \underline{e}^{(3)})$ et $\underline{T}(\underline{x}, \underline{e}^{(3)}) = \sigma_0 (3 \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.

PARTIEL 2000

Le partiel 2000 était constitué des parties "cinématique" et "grande déformation" de l'examen 2000 ainsi que de l'exercice suivant.

EXERCICE 9.12

Tenseur des contraintes

En un point \underline{x} donné d'un milieu continu, on mesure les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur un élément de surface de normale \underline{n} . On suppose que $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$ est un repère orthonormé et que l'on a obtenu les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{T}[\underline{x}, \underline{e}^{(1)}] &= \sigma_0 (-\underline{e}^{(1)} + \gamma \underline{e}^{(3)}) \\ \underline{T}[\underline{x}, \underline{e}^{(2)}] \cdot \underline{e}^{(2)} &= -\sigma_0 \\ \underline{T}[\underline{x}, \underline{e}^{(3)}] \wedge \underline{e}^{(1)} &= -\sigma_0 \underline{e}^{(2)} . \end{aligned} \quad (9.5)$$

- 1) Quelle est la dimension de $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ (unités SI).
- 2) Donner les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x})$.
- 3) Calculer les valeurs propres de $\underline{\sigma}(\underline{x})$.

4) Calculer ses directions propres.

Corrigé page 34

Corrigé Tenseur des contraintes

1) La force de contact \underline{T} et en Newton par m^2 , c'est-à-dire en Pascal. 2) On trouve que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\sigma_0$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \gamma \sigma_0$ et $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$. 3) L'ensemble des valeurs propres est $\{-\sigma_0, (-1 + \gamma)\sigma_0, (-1 - \gamma)\sigma_0\}$. 4) L'ensemble des vecteurs propres normés correspondant est $\{\underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(+)}, \underline{e}^{(-)}\}$ avec $\underline{e}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$ et $\underline{e}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(3)})$.

PARTIEL 1999

Le partiel était constitué des questions 1 à 13, 21 à 26 et 30 à 37 de l'examen 1999

PARTIEL 1998

NB : le problème est volontairement trop long. Il est recommandé de suivre l'ordre des questions, le barème privilégiant les premières questions. Il recommande d'être très concis (mais précis) dans la réponse aux questions. On pourra tracer les courbes directement sur les figures donnés dans l'énoncé.

PROBLÈME 9.13 Écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de Poiseuille défini par la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t) = \beta (l^2 - x_3^2) \underline{e}^{(1)}$ du champ de vitesse dans le repère orthonormé $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$. On choisit pour ce mouvement la configuration de référence $\Omega_0 = \Omega(0)$ occupant le cube $\|\underline{a}\| \leq l$ à l'instant $t = 0$.

Étude locale du mouvement

On considère la trajectoire $\underline{x}(t)$ définie par $\underline{x}(t_*) = \underline{x}_*$. On considère ensuite la trajectoire $\underline{x}'(t)$ définie par $\underline{x}'(t_*) = \underline{x}_* + \delta l \underline{e}^{(3)}$ avec $\delta l > 0$. On note $\underline{dx}(t)$ le vecteur (de taille finie pour le moment) défini par $\underline{dx}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$. On note $\delta x(t)$ sa norme et $\theta(t)$ l'angle qu'il fait avec l'axe Ox_1 . Dans un premier temps, on choisit $\underline{x}_* = -l \underline{e}^{(3)}$.

- 1) Dessiner la trajectoire $\underline{x}(t)$ et le vecteur $\underline{dx}(t)$ à des instants successifs $t \geq t_*$.
- 2) Pour δl fixé, calculer $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ pour tout temps et indiquer le sens de variation de ces fonctions du temps.
- 3) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en t de $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ au voisinage de $t = t_*$ pour δl fixé.

- 4) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en δl de $\delta x(t)/\delta l$ et $\gamma(t) = \pi/2 - \theta(t)$ au voisinage de $\delta l = 0$ pour $t \geq t_*$ fixé.
- 5) Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$. Relier les valeurs des composantes D_{33} et D_{13} aux résultats de la question 3.
- 6) Calculer le tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}_*, t_*)$ et le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*)$. Interpréter le résultat.
- 7) Déterminer la base de diagonalisation de $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$ et interpréter ses composantes dans cette base.
- 8) On suppose à présent que $\underline{x}_* = \underline{0}$. Reprendre les sept questions précédentes pour ce nouveau choix de \underline{x}_* .
- 9) Comparer les résultats obtenus pour $\underline{x}_* = \underline{0}$ et $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$.

Tenseur des dilatations

On s'intéresse à la grande déformation entre la configuration de référence $\Omega_0 = \Omega(0)$ et la configuration déformée $\Omega(t)$ au temps t .

- 10) Exprimer le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{a}, t)$ de cette déformation et interpréter ses composantes C_{33} et C_{13} .
- 11) Commenter le cas particulier $\underline{a} = \underline{0}$.

Grande déformation de cercles de tailles finies

On s'intéresse à l'image du cercle $\text{Cer}(O, \rho)$ d'équations $a_1^2 + a_3^2 = \rho^2$ et $a_2 = 0$ dans la configuration de référence Ω_0 par la déformation due au mouvement et reliant le temps $t = 0$ au temps t . On note $\text{Boo}(\rho, t)$ la courbe image de ce cercle dans la configuration déformée $\Omega(t)$.

- 12) Montrer que l'image du cercle obéit aux équations

$$\left[x_1 - d(t) + \frac{x_3^2}{2r(t)} \right]^2 + x_3^2 = \rho^2 \quad \text{et} \quad x_2 = 0 \quad (9.6)$$

où $d(t)$ et $r(t)$ sont des fonctions de t que l'on explicitera.

- 13) Tracer la courbe $r(t)$ et indiquer le temps t_ρ tel que $r(t_\rho) = \rho$.

On choisit une valeur de r et on note $t_r = 1/(2\beta r)$ de telle sorte que $r(t_r) = r$. À l'instant t_r , on considère le point M de coordonnées $[d(t_r), 0, 0]$ dans le repère $Ox_1x_2x_3$. On considère alors le repère orthonormé $Mxyz$ défini par le changement de coordonnées $x = x_1 - d(t_r)$, $y = x_2$ et $z = x_3$. Soit N , A et D les points dont les coordonnées dans le nouveau repère $Mxyz$ sont respectivement $[-r, 0, 0]$, $(\rho, 0, 0)$ et $(-\rho, 0, 0)$.

Cas $\rho < r$ à l'instant t_r

Dans un premier temps, on suppose que $\rho < r$. On cherche une construction graphique de la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$.

- 14) Dessiner sur une même graphe le cercle $\text{Cer}(N, r)$ de centre N et de rayon r puis le cercle $\text{Cer}(M, \rho)$ de centre M et de rayon ρ .
- 15) Calculer l'équation de la courbe, notée $\text{Par}(M, r)$, image au temps t_r du segment défini par $a_1 = 0, a_2 = 0, |a_3| \leq 4r$ dans le repère $Oa_1a_2a_3$.
- 16) Montrer que le rayon de courbure de $\text{Par}(M, r)$ au point M est égal à r .
- 17) Dessiner sur le même graphe que précédemment la courbe $\text{Par}(M, r)$ en traçant les tangentes aux deux extrémités.
- 18) Montrer que l'intersection du plan $z = \rho$ et de la courbe $\text{Par}(M, r)$ est un point B appartenant aussi à la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$.
- 19) Calculer $\underline{F}(\underline{a}, t_r)$ pour $\underline{a} = \rho \underline{e}^{(3)}$.
- 20) En déduire que la tangente à $\text{Boo}(\rho, t_r)$ en B est dans la direction $\underline{e}^{(1)}$.
- 21) Montrer que les points A et D appartiennent à $\text{Boo}(\rho, t_r)$ et tracer la tangente à cette courbe en chacun de ces points.
- 22) Toujours sur le même graphe, donner l'allure de la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$.

Cas $\rho > r$ à l'instant t_r

On suppose maintenant que $\rho > r$. On cherche une construction graphique de la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$.

- 23) Tracer sur un graphe les points M, N, A, B et D , les cercles $\text{Cer}(N, r)$ et $\text{Cer}(M, \rho)$ ainsi que la courbe $\text{Par}(M, r)$.
- 24) Tracer sur le même graphe la courbe $\text{Par}(N, r)$ image au temps t_r du segment de la configuration de référence Ω_0 défini par $a_1 = -r, a_2 = 0, |a_3| \leq 4r$.
- 25) Représenter sur le graphe l'intersection Q de la droite Nz et du cercle $\text{Cer}(M, \rho)$. Représenter ensuite l'intersection C de la droite Qx et de la courbe $\text{Par}(N, r)$. Montrer que le point C appartient à la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$. On note q la coordonnée sur $\underline{e}^{(3)}$ des points Q et C dans le repère $Oxyz$.
- 26) Calculer le tenseur $\underline{F}(\underline{a}, t_r)$ pour $\underline{a} = q\underline{e}^{(3)}$ dans la configuration de référence.
- 27) En déduire que l'image d'un vecteur infinitésimal $d\underline{a}$ tangent en $\underline{a} = q\underline{e}^{(3)}$ au cercle $\text{Cer}(O, \rho)$ est proportionnel à $\underline{e}^{(3)}$.
- 28) En déduire la tangente de $\text{Boo}(\rho, t_r)$ au point C .
- 29) Donner l'allure de la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$.

Famille de courbes $\text{Boo}(\rho, t)$

On suppose que l'on fixe le temps t et que l'on fait varier le rayon ρ du cercle centré en \underline{O} dans la configuration de référence et dont l'image à l'instant t par le mouvement est la courbe $\text{Boo}(\rho, t)$.

- 30) Décrire le lieu des points C lorsque ρ varie pour les valeurs de ρ telles que C existe.

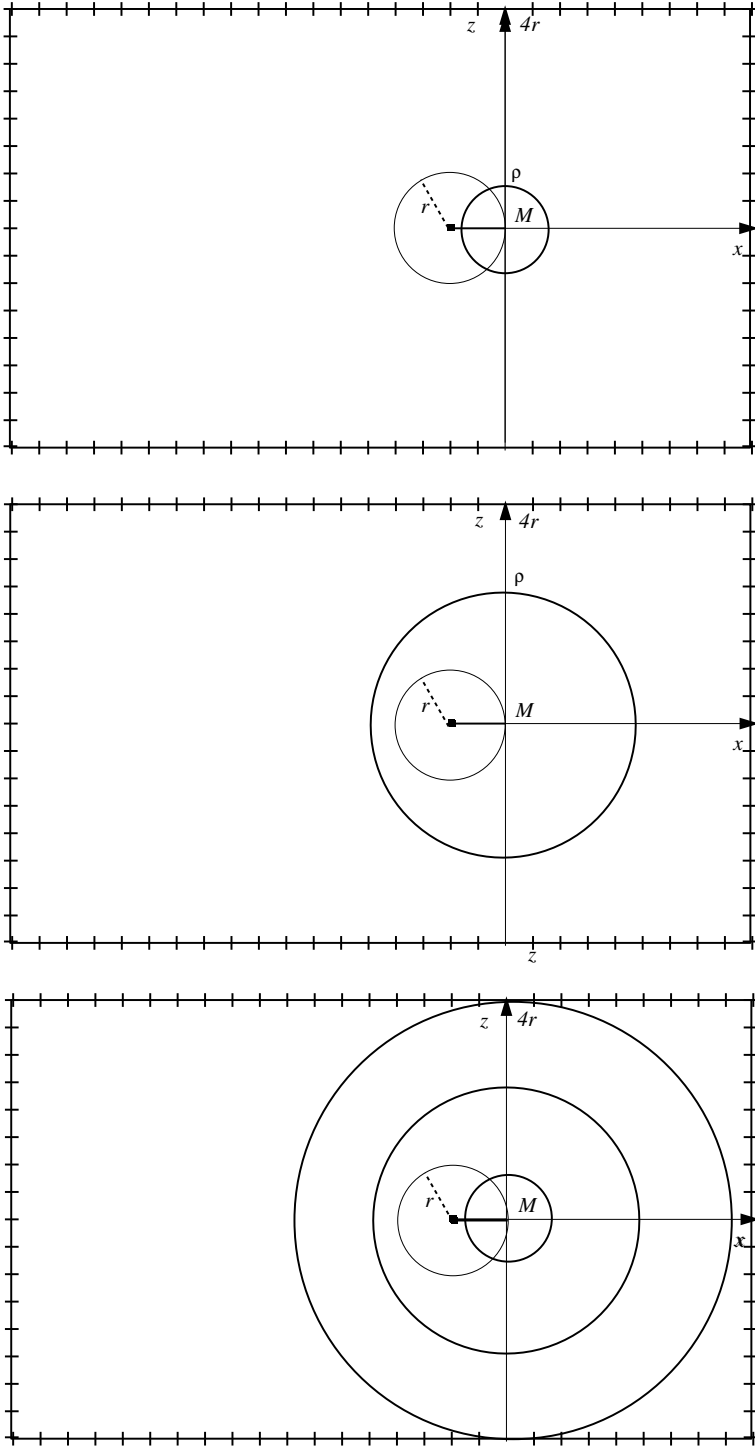


Figure 9.3: Figures à compléter selon l'énoncé du Partiel 1998

- 31) Utiliser les constructions graphiques précédentes pour tracer au moins trois courbes $\text{Boo}(\rho, t)$ pour un gamme de ρ représentative de la toute la famille ρ variable t fixé.
- 32) Montrer que pour t fixé et ρ tendant vers zéro l'image d'un cercle est un cercle.

Corrigé page 38

Corrigé

 Écoulement de Poiseuille

Étude locale du mouvement

1) Pour $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$, la trajectoire $x(t)$ est un point (adhérence à une paroi). Le vecteur $\underline{dx}(t)$ fait un angle $\theta(t_*) = \pi/2$ qui décroît vers 0 avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne. **2)** $\delta x(t) = \delta l \sqrt{1 + \beta^2(2l - \delta l)^2(t - t_*)^2}$ et $\theta(t) = \pi/2 - \arctg[\beta|2l - \delta l|(t - t_*)]$. La fonction $\delta x(t)$ est croissante, sa pente en $t = t_*$ est nulle et tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. $\theta(t)$ est décroissante de $\pi/2$ à 0. **3)** $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$. On a $\theta(t) = \pi/2 - \beta(2l - \delta l)(t - t_*) + O[(t - t_*)^2]$. **4)** $\delta x(t)/\delta l = \sqrt{1 + (2\beta l)^2(t - t_*)^2} + O(\delta l^2)$. On a $\gamma(t) = \arctg[2\beta l(t - t_*)] + O(\delta l^2)$. **5)** Seuls $D_{13}(\underline{x}_*, t_*) = D_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$ sont non nuls. Au voisinage des points immobiles $a_3 = -l$ et de $t = t_*$, les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement. L'angle de glissement du couple $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(3)})$ croît avec une pente $2\beta l$ au voisinage de $t = t_*$. En utilisant $\frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} |_{t_*} = D_{33}(\underline{x}_*, t_*)$ on voit que la nullité de D_{33} traduit la nullité de la pente de la fonction $\delta x(t)$ au voisinage de $t = t_*$. Ce résultat est aussi visible dans le développement limité en t de $\delta x(t)$. En utilisant $\frac{d}{dt} \gamma(t_*) = 2D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$ on voit que la valeur de $D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$ se retrouve dans le développement limité en t de $\gamma(t)$. **6)** Seuls $\Omega_{13}(\underline{x}_*, t_*) = -\Omega_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$ sont nuls. On a donc $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l \underline{e}^{(2)}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$ le taux de rotation égal à βl en valeur absolue et dans le sens trigonométrique inverse du plan Ox_1x_3 . **7)** La base de diagonalisation de $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*)$ est engendrée par les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(3)})$ et $\underline{e}^{(2)}$. Le taux de dilatation dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} \pm \underline{e}^{(3)})$ est $\pm \beta l$. **8)** Pour $\underline{x}_* = \underline{0}$ la trajectoire $x(t)$ est rectiligne. Le vecteur $\underline{dx}(t)$ fait un angle $\theta(t_*) = \pi/2$ qui croît vers π avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne. $\delta x(t) = \delta l \sqrt{1 + \beta^2(t - t_*)^2 \delta l^2}$ et $\theta(t) = \pi/2 + \arctg[\beta(t - t_*)\delta l]$. La fonction $\delta x(t)$ est croissante, sa pente en $t = t_*$ est nulle et tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. La fonction $\theta(t)$ est croissante de $\pi/2$ à π . Le développement limité en temps est $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$. On a $\theta(t) = \pi/2 + \beta(t - t_*)\delta l + O[(t - t_*)^2]$. Le développement limité en δl est $\delta x(t)/\delta l = 1 + O(\delta l^2)$. On a $\gamma(t) = -\beta(t - t_*)\delta l + O(\delta l^2)$. On a $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*) = 0$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$, et les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement et les angles de glissements des couples de vecteurs orthogonaux sont nuls. Ceci est conforme avec le fait que l'ordre 1 du développement limité en δl de $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ est sont

respectivement 1 et 0. On a $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\underline{\omega}}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{\underline{0}}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$ le taux de rotation est nul. Toutes les bases diagonalisent la matrice nulle $\underline{\underline{D}}$. **9)** Le point $\underline{x}_* = \underline{0}$ correspond à un extremum du profil de vitesse alors que le point $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$ est représentatif d'un point quelconque. Au voisinage d'un extremum de vitesse il n'y a pas de déformation ($\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$) ni rotation ($\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$) à l'ordre 1.

Tenseur des dilatations

10) Seuls $C_{11} = C_{22} = 1$, $C_{13} = C_{31} = -2\beta a_3 t$ et $C_{33} = 1 + 4\beta^2 a_3^2 t$ sont non nuls. **11)** On a $\underline{\underline{C}}(\underline{0}, t) = \underline{\underline{I}}$. Les longueurs et les angles des petits voisinages des trajectoires $a_3 = 0$ sont conservés dans le mouvement.

Grande déformation de cercles de tailles finies

12) Le mouvement inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ s'écrit $a_1 = x_1 - d(t) + x_3^2/[2r(t)]$, $a_2 = x_2$ et $a_3 = x_3$ avec $d(t) = \beta l^2 t$ et $r(t) = 1/[2\beta t]$. Il suffit de remplacer $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$ dans l'équation du cercle. **13)** La courbe $r(t)$ est une hyperbole qui décroît vers zéro. Au temps $t_\rho = 1/(2\beta\rho)$ la fonction $r(t)$ croise ρ .

Cas $\rho < r$ à l'instant t_r

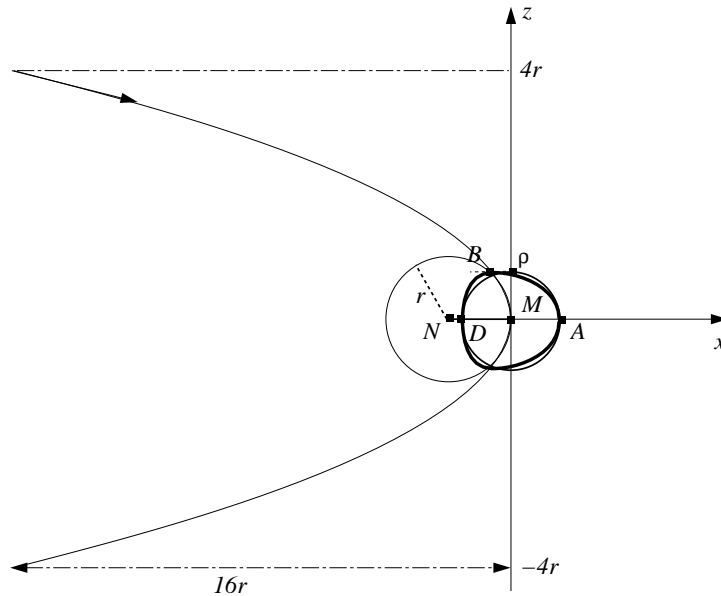
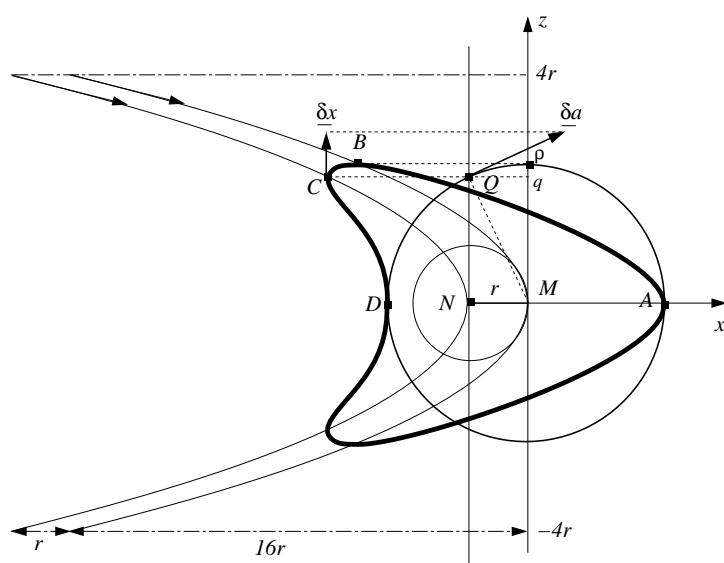
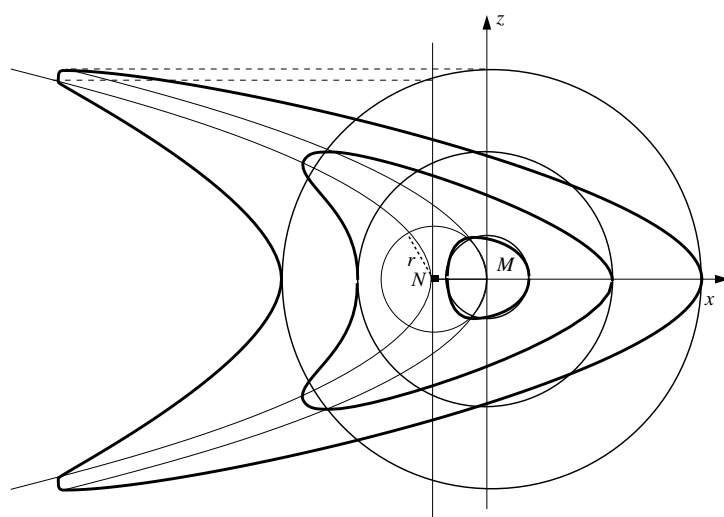


Figure 9.4: Courbe Boo(ρ, t_r) pour $\rho < r$.

14) Voir figure 9.4. **15)** L'image de $a_1 = 0$ avec $|a_3| \leq 4r$ est $x_1 = d(t_r) - x_3^2/(2r) = (l^2 - x_3^2)/2r$ avec $|x_3| \leq 4r$. C'est une parabole. **16)** Le cercle osculateur des Par(M, r) est le cercle Cer(N, r). **17)** Voir figure 9.4. **18)** Le point B est l'image du plus "haut" (en x_3) point de Cer(O, ρ). **19)** Seuls $F_{11} =$

Figure 9.5: Courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$ pour $\rho > r$.Figure 9.6: Courbe $\text{Boo}(\rho, t)$ pour plusieurs valeurs de ρ

$F_{22} = F_{33} = 1$ et $F_{13} = -\rho/r$ sont non nuls. **20)** Un petit vecteur $\underline{da} = \delta a \underline{e}^{(1)}$ tangent en $\underline{a} = \rho \underline{e}^{(3)}$ au cercle $\text{Cer}(O, \rho)$ se transforme en $\underline{dx} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_r) \underline{da} = \delta a \underline{e}^{(1)}$ tangent à $\text{Boo}(\rho, t_r)$. **21)** Dans un plan “horizontal” $x_3 = \text{constante}$, les distances “horizontales” sont inchangées par le mouvement. Les points A et D sont donc situés sur l’image $\text{Boo}(\rho, t_r)$ de $\text{Cer}(O, \rho)$ au temps t_r . Les tangentes en ces points sont parallèles $\underline{e}^{(3)}$ car $\underline{\underline{F}}(\underline{0}, t)$ laisse invariante cette direction. **22)** Voir figure 9.4.

Cas $\rho > r$ à l’instant t_r

23) Voir figure 9.5. **24)** Voir figure 9.5. **25)** Voir figure 9.5. Dans un plan “horizontal” $x_3 = \text{constante}$, les distances “horizontales” sont inchangées par le mouvement. Ceci entraîne que C appartient à la courbe $\text{Boo}(\rho, t_r)$. **26)** Seuls $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 1$ et $F_{13} = -q/r$ sont non nuls. **27)** Le vecteur tangent au cercle est proportionnel au vecteur $(d, 0, q)$. Son produit par $\underline{\underline{F}}(q \underline{e}^{(3)}, t_r)$ est proportionnel $\underline{e}^{(3)}$. **28)** La tangente de $\text{Boo}(\rho, t_r)$ en C est donc “verticale”. **29)** Voir Figure 9.5.

Famille de courbes $\text{Boo}(\rho, t)$

30) Le lieu des points C est la parabole $\text{Par}(N, r)$. **31)** Voir figure 9.6. **32)** Étant donné que $\underline{\underline{C}}(\underline{0}, t) = \underline{\underline{I}}$, l’image d’un cercle infinitésimal est un cercle.

PARTIEL 1997

Le partiel 1997 était constitué du problème “Mouvement de déformation affine”.

PROBLÈME 9.14

 Mouvement de déformation affine

On considère un mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par les équations

$$x_1 = a_1 + \alpha t a_2, \quad x_2 = a_2 + \alpha t a_1, \quad x_3 = a_3. \quad (9.7)$$

On suppose que la configuration de référence $\Omega_0 = \Omega(0)$ est un volume de particules pris à l’instant $t = 0$ qui occupe un cube de côté $2l$ et de centre $\underline{0}$ défini par $-l \leq a_i \leq l$ pour $i = 1, \dots, 3$. On choisira $\alpha > 0$.

- 1) Calculer pour tout instant t le volume $\mathcal{V}(t)$ du domaine $\Omega(t)$ constituant la configuration déformée.
- 2) Tracer la courbe $\mathcal{V}(t)$ en fonction du temps. En déduire le temps t_* à partir duquel le mouvement cesse d’être physique.

On supposera désormais que le mouvement n’est défini que sur l’intervalle temporel $[0, t_*]$.

Point de vue lagrangien

À t fixé, on considère la déformation entre la configuration de référence Ω_0 et la configuration déformée $\Omega(t)$.

- 3) Calculer la dilatation relative autour d'un point \underline{a} quelconque de Ω_0 dans la direction 1 engendrée par le vecteur unitaire $\underline{e}^{(1)}$.
- 4) Calculer l'angle de glissement γ_{12} entre les directions 1 et 2 autour d'un point \underline{a} quelconque.
- 5) Calculer la valeur de cet angle de glissement γ_{12} pour $t = t_*$. Commenter ce résultat.

Point de vue eulérien

- 6) Calculer la représentation eulérienne $\underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse de ce mouvement.
- 7) Calculer le tenseur des taux de déformation \underline{D} ainsi que le tenseur des taux de rotation $\underline{\Omega}$.
- 8) Calculer le taux d'allongement relatif autour d'un point quelconque \underline{x} de $\Omega(t)$ dans la direction 1.
- 9) Calculer le taux de glissement entre les directions 1 et 2 autour d'un point quelconque \underline{x} de $\Omega(t)$.

Changement de repère

- 10) Calculer les dilatations relatives autour d'un point \underline{a} quelconque de Ω_0 dans les directions engendrées par les vecteurs $\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}$ et $\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(2)}$.
- 11) Calculer l'angle de glissement entre ces deux directions.
- 12) Donner les valeurs propres et les directions propres du tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a}, t)$ pour tout point \underline{a} et tout temps t .
- 13) Écrire l'équation $\underline{x}' = \underline{X}'(\underline{a}', t)$ des trajectoires dans une base propre de ce tenseur, et décrire la configuration de référence Ω_0 dans cette nouvelle base.

Étude d'un nouveau mouvement

Sauf mention contraire, on s'intéresse désormais au nouveau mouvement $\underline{X}'(\underline{a}', t)$ défini par les équations

$$x'_1 = a'_1 + \alpha t a'_1, \quad x'_2 = a'_2 - \alpha t a'_2, \quad x'_3 = a'_3. \quad (9.8)$$

On note $\underline{f}^{(1)}$, $\underline{f}^{(2)}$ et $\underline{f}^{(3)}$ les vecteurs de base associés aux coordonnées x'_1 , x'_2 et x'_3 . On suppose que la configuration de référence $\Omega'_0 = \Omega'(0)$ est un volume de particules pris à l'instant $t = 0$ qui occupe un parallélépipède défini par $-l\sqrt{2} \leq a'_i \leq l\sqrt{2}$ pour $i = 1, 2$ et $-l \leq a'_3 \leq l$.

- 14) Calculer pour tout instant t le volume $\mathcal{V}'(t)$ du domaine $\Omega'(t)$ constituant la configuration déformée.

- 15) En déduire le temps t_* à partir duquel le mouvement cesse d'être physique.

On supposera désormais que le mouvement n'est défini que sur l'intervalle temporel $[0, t_*]$.

Élasticité linéaire

On suppose que le domaine $\Omega'(t)$ est occupé par un milieu élastique homogène et isotrope de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . On s'intéresse aux moments initiaux pendant lesquels la déformation est suffisamment petite pour que la loi de Hooke reste valide. On suppose que chacune des faces du domaine $\Omega'(t)$ est contrainte par une force surfacique uniforme et normale que l'on note F_i pour la face de normale à $\underline{f}^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, 3$. On suppose que le mouvement est suffisamment lent pour que l'on puisse négliger les forces d'inertie du matériau.

- 16) Calculer les allongements relatifs $\Delta_i(\underline{a}) = \Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{f}^{(i)}) - 1$, pour $i = 1, \dots, 3$, où $\Lambda(\underline{a}; \underline{da})$ désigne la dilatation relative autour du point \underline{a} dans la direction du vecteur \underline{da} .
- 17) Exprimer ces allongements relatifs en fonction des forces surfaciques F_1 , F_2 et F_3 en utilisant la loi de Hooke.
- 18) En déduire la valeur de ces forces en fonction du temps.

Trajectoires et lignes de champs

On cherche maintenant à décrire les trajectoires et les lignes de champs du nouveau mouvement $\underline{X}'(\underline{a}', t)$.

- 19) Dessiner le domaine $\Omega'(t)$ à trois instants différents.
- 20) Donner l'équation des trajectoires sous la forme $x'_2 = f(x'_1)$ et en tracer au moins cinq.
- 21) Calculer l'équation des lignes de courant du champ de vitesse à l'instant $t = 0$. En tracer au moins cinq.
- 22) Calculer l'équation des lignes de courant du champ de vitesse à tous les instants et tracer leur allure.
- 23) Dessiner le lieu des points \underline{x} qui ont été balayés au moins une fois par au moins une trajectoire du mouvement.

Connection avec le premier mouvement

On considère toujours le mouvement défini par les équations $\underline{x}' = \underline{X}'(\underline{a}', t)$ mais on suppose maintenant que la configuration de référence $\Omega_0 = \Omega(t)$ est le cube de côté $2l$ défini par $|a'_1 + a'_2| \leq l\sqrt{2}$, $|a'_1 - a'_2| \leq l\sqrt{2}$ et $|a'_3| \leq l$.

- 24) Dessiner au moins trois positions de la configuration déformée $\Omega(t)$ ainsi qu'au moins cinq trajectoires.

- 25) Dessiner l'allure du lieu des points \underline{x}' balayés au moins une fois par les trajectoires de ce mouvement.
- 26) Calculer explicitement l'équation des frontières de ce lieu de points.
- 27) Indiquer et tracer les forces que l'on doit appliquer au domaine $\Omega(t)$ du premier mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ pendant le temps où le matériau qu'il contient garde un comportement homogène et isotrope.

Corrigé page 44

Corrigé Mouvement de déformation affine

1) $\mathcal{V}(t) = J(\underline{a}, t) \mathcal{V}(0) = (1 - \alpha^2 t^2) \mathcal{V}(0) = 8l^3(1 - \alpha^2 t^2)$. 2) $\mathcal{V}(t)$ est une parabole de sommet $(0, 8l^3)$. $t_* = 1/\alpha$.

Point de vue lagrangien

3) Les composantes du tenseur des dilatations sont $C_{11} = C_{22} = 1 + \alpha^2 t^2$, $C_{12} = C_{21} = 2\alpha t$, $C_{33} = 1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. Ce tenseur est indépendant de \underline{a} . La dilatation relative dans la direction 1 est $\Lambda(\underline{a}; \delta a \underline{e}^{(1)}) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}$. 4) L'angle de glissement $\gamma_{12}(t)$ ne dépend pas de \underline{a} et vérifie $\sin \gamma_{12} = C_{12} / \sqrt{C_{11} C_{22}} = 2\alpha t / (1 + \alpha^2 t^2)$. On a donc $\gamma_{12} = \arcsin[2\alpha t / (1 + \alpha^2 t^2)]$. 5) On a $\gamma_{12}(t_*) = \pi/2$. Les directions 1 et 2 se déforment jusqu'à être confondues pour $t = t_*$.

Point de vue eulérien

6) $U_1^{(E)} = \alpha(x_2 - \alpha t x_1) / (1 - \alpha^2 t^2)$, $U_2^{(E)} = \alpha(x_1 - \alpha t x_2) / (1 - \alpha^2 t^2)$ et $U_3^{(E)} = 0$. 7) Les composantes du tenseur des taux de déformation sont $D_{11} = D_{22} = -\alpha^2 t / (1 - \alpha^2 t^2)$, $D_{12} = D_{21} = \alpha / (1 - \alpha^2 t^2)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. Ce tenseur est indépendant de \underline{x} . Les composantes du tenseur des taux de rotation sont nulles : $\Omega_{ij} = 0$. 8) Le taux d'allongement dans la direction 1 est D_{11} . 9) Le taux de glissement entre les directions 1 et 2 ne dépend pas de \underline{x} et est égal à $\frac{d}{dt} \gamma_{12}(t) = 2 D_{12} = 2\alpha / (1 - \alpha^2 t^2)$.

Changement de repère

10) Les dilatations relatives dans les directions bissectrices de $\underline{e}^{(1)}$ et $\underline{e}^{(2)}$ sont $\Lambda[\underline{a}; \delta a (\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)})] = 1 + \alpha t$ et $\Lambda[\underline{a}; \delta a (\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(2)})] = 1 - \alpha t$. 11) L'angle de glissement $\gamma[\underline{a}; \delta a (\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}), \delta a (\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(2)})]$ entre ces directions est nul pour tout temps. 12) Les directions engendrées par $\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}$ et $\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(2)}$ sont les directions propres de $\underline{C}(\underline{a}, t)$ respectivement associées aux valeurs propres $(1 + \alpha t)^2$ et $(1 - \alpha t)^2$. La direction engendrée par $\underline{e}^{(3)}$ est associée à la valeur propre 1. 13) Les équations des trajectoires dans une base propre quelconque de \underline{C} sont celles du mouvement étudié ci-dessous.

Étude d'un nouveau mouvement

14) $\mathcal{V}'(t) = J(\underline{a}, t)$ $\mathcal{V}'(0) = (1 - \alpha^2 t^2)$ $\mathcal{V}'(0) = 16l^3(1 - \alpha^2 t^2)$. La configuration de référence de ce nouveau mouvement à un volume double que pour le mouvement précédent. **15)** $t_* = 1/\alpha$. On retrouve le même temps limite que pour le mouvement étudié avant le changement de base.

Élasticité linéaire

16) Les allongements relatifs sont $\Delta_1 = \alpha t$, $\Delta_2 = -\alpha t$ et $\Delta_3 = 0$. **17)** En invoquant le principe de superposition on peut écrire $\Delta_1 = (F_1 - \nu F_2 - \nu F_3)/E$ $\Delta_2 = (-\nu F_1 + F_2 - \nu F_3)/E$ et $\Delta_3 = (-\nu F_1 - \nu F_2 + F_3)/E$. **18)** En comparant les deux expressions précédentes des allongements relatifs on obtient $F_1 = \alpha t E/(1 + \nu)$ $F_2 = -\alpha t E/(1 + \nu)$ et $F_3 = 0$.

Trajectoires et lignes de champs

19) La section carrée du domaine s'allonge dans la direction 1, s'applatit dans la direction 2 et s'écrase sur l'axe engendré par $\underline{f}^{(1)}$ à $t = t_*$. **20)** Dans les plans normaux à $x_3 = a_3$, les trajectoires suivent les courbes d'équation $x_2 = a_2 (2 - x_1/a_1)$ où $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \Omega'$. **21)** Les composantes de la vitesse eulérienne du mouvement dans la base $(\underline{f}^{(1)}, \underline{f}^{(2)}, \underline{f}^{(3)})$ sont $U_1^{(E)'} = \alpha x_1'/(1 + \alpha t)$, $U_2^{(E)'} = -\alpha x_2'/(1 - \alpha t)$ et $U_3^{(E)'} = 0$. À $t = 0$ les lignes de courant du champ défini par $U_1^{(E)'} = \alpha x_1'$ et $U_2^{(E)'} = -\alpha x_2'$ sont des courbes $x_2' = f(x_1')$ telles que $df(x_1')/dx_1' = U_2^{(E)'} / U_1^{(E)'} = -f(x_1')/x_1'$. On en déduit que $x_2' = f(x_1') = C/x_1'$ où C est une constante arbitraire. Les lignes de champs à $t = 0$ sont donc des hyperboles. **22)** Aux instants ultérieurs, le même raisonnement conduit à des courbes $x_2' = f(x_1') = C(1/x_1')^{(1+\alpha t)/(1-\alpha t)}$. **23)** Dans un plan $x_3 = a_3$, ce lieu est la réunion du carré initial de côté $2l\sqrt{2}$ et de deux triangles rectangles isocèles dont les hypoténuses sont les côtés normaux à $\underline{f}^{(2)}$ du carré.

Connection avec le premier mouvement

24) Dans un plan $x_3 = a_3$ Le domaine $\Omega(0)$ est un carré à 45 degrés inscrit dans le domaine $\Omega'(0)$. Les domaines $\Omega(t)$ sont alors des losanges inscrits dans les rectangle $\Omega'(t)$ dont la déformation a été dessinée ci-dessus. **25)** L'allure est esquissée en traçant plusieurs droites joignant le carré à 45 degrés $\Omega(0)$ en l'axe $\underline{f}^{(2)}$ et égales aux trajectoires des points dont elles sont issues. **26)** Cette famille de droites s'écrit $x_2' = f(a, x_1') = (l\sqrt{2} - a_1')(2 - x_1'/a_1')$. Il s'agit en effet de droites $x_2' = a_2' (2 - x_1'/a_1')$ avec $a_1' + a_2' = l\sqrt{2}$. L'équation de l'enveloppe de cette famille de courbes est obtenue en écrivant $\partial f(a_1', x_1')/\partial a_1' = 0$. On en déduit que $|x_2'| = 2 l\sqrt{2} \left[1 - \sqrt{|x_1'|/(2l\sqrt{2})} \right]^2$ est l'équation de la frontière recherchée. **27)** Les forces $F_1 = \alpha t E/(1 + \nu)$ $F_2 = -\alpha t E/(1 + \nu)$ et $F_3 = 0$ appliquées au domaine $\Omega'(t)$ dans les directions $\underline{f}^{(1)}$, $\underline{f}^{(2)}$ et $\underline{f}^{(3)}$ sont

équivalentes à deux cisaillements $F = \alpha t E\sqrt{2}/(1 + \nu)$ appliqués au domaine $\Omega(t)$ dans les directions $\underline{e}^{(1)}$ et $\underline{e}^{(2)}$.

EXAMENS

Les examens portent sur les chapitres 1 à 8 du livre "Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables", O. Thual, Cépaduès-Éditions 1997.

EXAMEN 2006

PROBLÈME 9.15 Écoulements de Poiseuille - Couette

On considère un écoulement fluide compris entre deux plans d'équations $z = -l$ et $z = l$ dans le repère orthonormé $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$.

On suppose que la loi de comportement rhéologique du milieu est celle d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique homogène ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n . On note $\underline{U}(\underline{x}, t)$ le champ de vitesse et $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression. On note $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ le champ de gravité.

On suppose que la plaque du bas, en $z = -l$, est immobile, et que la plaque du haut, en $z = l$, est animée d'une vitesse uniforme $U_0 \underline{e}_x$.

- 1) Écrire les conditions aux limites pour la vitesse en $z = \pm l$.
- 2) Écrire les équations du mouvement.

Détermination des profils

On cherche des solutions stationnaires telles que $\underline{U}(\underline{x}, t) = U(z) \underline{e}_x$. On suppose que $p(0, 0, 0) = P_0$ et $p(L, 0, 0) = P_L$, les pressions en $\underline{x} = \underline{0}$ et $\underline{x} = L \underline{e}_x$ sont des constantes connues. On suppose que $P_L \leq P_0$.

- 3) Écrire les équations du mouvement que doivent vérifier ces solutions particulières.
- 4) Montrer d'abord que la pression est de la forme $p = C z + G(x)$ où C est une constante que l'on précisera.
- 5) Montrer que $G'(x) = -B$ et que p est de la forme $p = A - B x + C z$ où A et B sont des constantes que l'on précisera.
- 6) Montrer que $U(z)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire avec deux conditions aux limites que l'on précisera. On pourra noter $\beta = (P_0 - P_L)/(2 \rho_0 \nu_n L)$.

- 7) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_0 = 0$ (écoulement de Poiseuille).
- 8) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_0 \neq 0$ et $P_L = P_0$ (écoulement de Couette).
- 9) Calculer $U(z)$ dans le cas général $U_0 \neq 0$ et $P_L \neq P_0$. Comparer avec les profils des deux questions précédentes et commenter.

Corrigé page 49

PROBLÈME 9.16

 Étude de l'écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de Poiseuille défini par sa représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t) = \beta (l^2 - x_3^2) \underline{e}^{(1)}$ du champ de vitesse dans le repère orthonormé $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$. On choisit pour ce mouvement la configuration de référence $\Omega_0 = \Omega(0)$ occupant le cube $\|\underline{a}\| \leq l$ à l'instant $t = 0$.

Étude locale du mouvement

On considère la trajectoire $\underline{x}(t)$ définie par $\underline{x}(t_*) = \underline{x}_*$. Dans un premier temps, on choisit $\underline{x}_* = -l \underline{e}^{(3)}$ et on considère la trajectoire $\underline{x}'(t)$ définie par $\underline{x}'(t_*) = \underline{x}_* + \delta l \underline{e}^{(3)}$ avec $0 < \delta l < l$. On note $\underline{\delta x}(t)$ le vecteur défini par $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$. On note $\delta x(t)$ sa norme et $\theta(t)$ l'angle qu'il fait avec l'axe Ox_1 .

- 1) Dessiner la trajectoire $\underline{x}(t)$ et le vecteur $\underline{\delta x}(t)$ à des instants successifs $t \geq t_*$.
- 2) Pour δl fixé, calculer $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ pour tout temps et indiquer le sens de variation de ces fonctions du temps.
- 3) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en t de $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ au voisinage de $t = t_*$ pour δl fixé.
- 4) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en δl de $\delta x(t)/\delta l$ et $\gamma(t) = \pi/2 - \theta(t)$ au voisinage de $\delta l = 0$ pour $t \geq t_*$ fixé.
- 5) Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$. Relier les valeurs des composantes D_{33} et D_{13} aux résultats de la question 3.
- 6) Calculer le tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}_*, t_*)$ et le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*)$. Interpréter le résultat.
- 7) Déterminer la base de diagonalisation de $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$ et interpréter ses composantes dans cette base.
- 8) On suppose à présent que $\underline{x}_* = \underline{0}$. Reprendre les sept questions précédentes pour ce nouveau choix de \underline{x}_* .
- 9) Comparer les résultats obtenus pour $\underline{x}_* = \underline{0}$ et $\underline{x}_* = -l \underline{e}^{(3)}$.

Corrigé page 49

PROBLÈME 9.17

 Calculs énergétiques de Couette

On considère le champ de pression $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$ et le champ de vitesse $U(z) = a z + b$ d'un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 et de viscosité

cinématique ν_n .

- 1) On suppose que $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_0$. En déduire a et b .
- 2) Calculer la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ exercés dans le domaine $\mathcal{D} = \{\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq D \text{ et } |z| \leq l\}$
- 3) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ des efforts de contact extérieurs à \mathcal{D} .
- 4) Comparer les puissances $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$. Commenter.

Corrigé page 50

Corrigé Écoulements de Poiseuille - Couette

1) Les conditions aux limites s'écrivent $\underline{U}(x, y, -l) = \underline{0}$ et $\underline{U}(x, y, l) = \underline{U}_0 \underline{e}_x$ pour tout couple (x, y) . 2) Les équations du mouvement s'écrivent $\text{div } \underline{U} = 0$ et $\frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \underline{\text{grad}} p + \nu_n \Delta \underline{U}$.

Détermination des profils

3) On a trivialement $\text{div } \underline{U} = 0$. Le profil $U(z)$ vérifie $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_n U''(z)$. Les autres équations s'écrivent $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. 4) En intégrant les deux dernières équations on obtient $p = -\rho_0 g z + G(x)$. On a donc $C = -\rho_0 g$. 5) En reportant dans la première, on obtient $0 = -\frac{1}{\rho_0} G'(x) + \nu_n U''(z)$. On en déduit que $G'(x)$ est une constante que l'on note $-B$. On a donc $p = A - Bx - \rho_0 g z$. Les valeurs de P en $x = 0$ et $x = L$ sur le plan central entraînent $A = P_0$ et $B = \frac{P_0 - P_L}{L}$. 6) On en déduit que $-\frac{P_0 - P_L}{\rho_0 L} = \nu_n U''(z)$ et donc $U''(z) = -\beta/2$ avec les conditions aux limites $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_0$. 7) Dans le cas $U_0 = 0$, la solution est $U(z) = \beta(l^2 - z^2)$. 8) Dans le cas $P_L = P_0$, on a $\beta = 0$ et donc $U(z) = U_0(z + l)/(2l)$. 9) Dans le cas général, on a $U(z) = \beta(l^2 - z^2) + U_0(z + l)/(2l)$. C'est la somme des deux profils précédent. Cela résulte du fait que l'équation du second degré et les conditions aux limites constituent un problème linéaire.

Corrigé Étude de l'écoulement de Poiseuille

Étude locale du mouvement

1) Pour $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$, la trajectoire $x(t)$ est un point (adhérence à une paroi). Le vecteur $\underline{\delta x}(t)$ fait un angle $\theta(t_*) = \pi/2$ qui décroît vers 0 avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne. 2) $\delta x(t) = \delta l \sqrt{1 + \beta^2(2l - \delta l)^2(t - t_*)^2}$ et $\theta(t) = \pi/2 - \arctg[\beta|2l - \delta l|(t - t_*)]$. La fonction $\delta x(t)$ est croissante, sa pente en $t = t_*$ est nulle et tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. $\theta(t)$ est décroissante de $\pi/2$ à 0. 3) $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$. On a $\theta(t) = \pi/2 - \beta(2l - \delta l)(t - t_*) + O[(t - t_*)^2]$. 4) $\delta x(t)/\delta l = \sqrt{1 + (2\beta l)^2(t - t_*)^2} + O(\delta l^2)$. On a $\gamma(t) = \arctg[2\beta l(t - t_*)] + O(\delta l^2)$. 5) Seuls $D_{13}(\underline{x}_*, t_*) = D_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$ sont non nuls. Au voisinage des points immobiles $a_3 = -l$ et de $t = t_*$, les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement. L'angle de glissement

du couple $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(3)})$ croît avec une pente $2\beta l$ au voisinage de $t = t_*$. En utilisant $\frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} \Big|_{t_*} = D_{33}(\underline{x}_*, t_*)$ on voit que la nullité de D_{33} traduit la nullité de la pente de la fonction $\delta x(t)$ au voisinage de $t = t_*$. Ce résultat est aussi visible dans le développement limité en t de $\delta x(t)$. En utilisant $\frac{d}{dt} \gamma(t_*) = 2D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$ on voit que la valeur de $D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$ se retrouve dans le développement limité en t de $\gamma(t)$. **6)** Seuls $\Omega_{13}(\underline{x}_*, t_*) = -\Omega_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$ sont nuls. On a donc $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l \underline{e}^{(2)}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$ le taux de rotation égal à βl en valeur absolue et dans le sens trigonométrique inverse du plan Ox_1x_3 . **7)** La base de diagonalisation de $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*)$ est engendrée par les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(3)})$ et $\underline{e}^{(2)}$. Le taux de dilatation dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)} \pm \underline{e}^{(3)})$ est $\pm\beta l$. **8)** Pour $\underline{x}_* = \underline{0}$ la trajectoire $x(t)$ est rectiligne. Le vecteur $\delta \underline{x}(t)$ fait un angle $\theta(t_*) = \pi/2$ qui croît vers π avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne. $\delta x(t) = \delta l \sqrt{1 + \beta^2(t - t_*)^2 \delta l^2}$ et $\theta(t) = \pi/2 + \arctg[\beta(t - t_*)\delta l]$. La fonction $\delta x(t)$ est croissante, sa pente en $t = t_*$ est nulle et tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. La fonction $\theta(t)$ est croissante de $\pi/2$ à π . Le développement limité en temps est $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$. On a $\theta(t) = \pi/2 + \beta(t - t_*)\delta l + O[(t - t_*)^2]$. Le développement limité en δl est $\delta x(t)/\delta l = 1 + O(\delta l^2)$. On a $\gamma(t) = -\beta(t - t_*)\delta l + O(\delta l^2)$. On a $\underline{D}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{0}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$, et les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement et les angles de glissements des couples de vecteurs orthogonaux sont nuls. Ceci est conforme avec le fait que l'ordre 1 du développement limité en δl de $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ est respectivement 1 et 0. On a $\underline{\Omega}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{0}$ et $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{0}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$ le taux de rotation est nul. Toutes les bases diagonalisent la matrice nulle \underline{D} . **9)** Le point $\underline{x}_* = \underline{0}$ correspond à un extremum du profil de vitesse alors que le point $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$ est représentatif d'un point quelconque. Au voisinage d'un extremum de vitesse il n'y a pas de déformation ($\underline{D} = \underline{0}$) ni rotation ($\underline{\Omega} = \underline{0}$) à l'ordre 1.

Tenseur des dilatations

10) Seuls $C_{11} = C_{22} = 1$, $C_{13} = C_{31} = -2\beta a_3 t$ et $C_{33} = 1 + 4\beta^2 a_3^2 t$ sont non nuls. **11)** On a $\underline{C}(\underline{0}, t) = \underline{I}$. Les longueurs et les angles des petits voisinages des trajectoires $a_3 = 0$ sont conservés dans le mouvement.

Corrigé Calculs énergétiques de Couette

1) En résolvant $al + b = U_0$ et $-al + b = 0$, on obtient $a = \frac{U_0}{2l}$ et $b = \frac{U_0}{2}$. On retrouve l'écoulement de Couette. **2)** Le tenseur \underline{D} est tel que $D_{13} = D_{31} = U'(z)/2 = \frac{1}{2l}U_0$ et $D_{ij} = 0$ sinon. Le tenseur des contraintes est $\underline{\sigma} = 2\rho_0\nu_n\underline{D}$. On a $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D} = -\rho_0\nu_n[U'(z)]^2$. On en déduit que $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{1}{2l}LD\rho_0\nu_nU_0^2$. **3)** La force de contact en $z = l$ est $\underline{T} = \underline{\sigma}\underline{e}_z = \rho_0\nu_nU'(l)\underline{e}_x$. Comme c'est la seule qui travaille, on a $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2l}LD\rho_0\nu_nU_0^2$. **4)** On remarque que $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = 0$. En effet, cet écoulement de Couette est une solution des équations de Navier-Stokes incompressibles. On déduit la

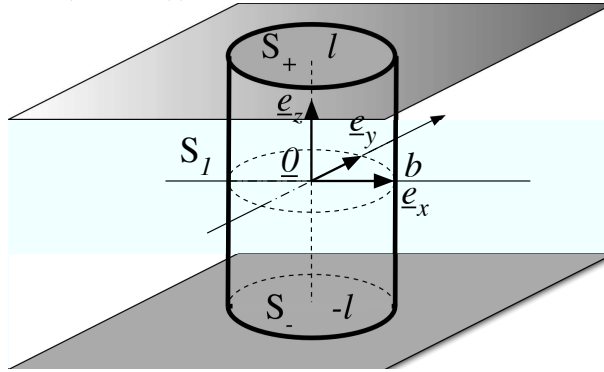
relation entre les puissances du théorème de l'énergie cinétique en remarquant que l'accélération de cet écoulement est nulle.

EXAMEN 2005

PROBLÈME 9.21

Cylindre thermoélastique

On note $(\underline{O}, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ le repère orthonormé canonique et (x, y, z) les coordonnées d'un point \underline{x} . On considère une pastille d'oxyde d'uranium dont la forme Ω est le cylindre d'axe Oz , de longueur $2l$ et dont la section est un cercle de rayon b . On choisit l'origine des axes au centre du cylindre (voir figure). On note S_- et S_+ les disques de rayon b et de cotes respectives $z = \pm l$ et S_1 la face $\partial\Omega - (S_- \cup S_+)$.



Équilibre thermique

Les faces S_- et S_+ de la pastille sont en contact avec un matériau conducteur de chaleur et le dispositif est placé dans un réacteur nucléaire, ce qui provoque l'échauffement de la pastille avec un taux de production volumique de chaleur $r(\underline{x})$. On suppose que l'équilibre est atteint et que le champ de température dans la pastille s'écrit $T(\underline{x}) = T_0 + \tau_0 - \frac{A}{2}z^2$ où T_0 , τ_0 et A sont des constantes. On note k le coefficient de diffusivité thermique de la pièce supposée obéir à la loi de Fourier.

- 1) Calculer le flux de chaleur qui sort de la face S_+ .
- 2) Comparer ce flux avec celui qui sort de la face S_- .
- 3) Calculer le flux de chaleur qui sort de la face S_1 .
- 4) Écrire l'équation de bilan de l'énergie interne dans la pastille.
- 5) En déduire le taux de production volumique de chaleur $r(\underline{x})$.
- 6) Calculer la puissance fournie à la pastille par la réaction nucléaire.
- 7) Comparer avec le flux de chaleur sortant à travers $\partial\Omega$.

Comportement thermoélastique

On suppose que, pour la température uniforme T_0 , la pastille occupe la configuration de référence Ω_0 qui est un cylindre de hauteur $2l$ et de section circulaire de rayon b_0 . On se place dans le cadre des petites perturbations, ce qui permet de confondre les configurations déformées Ω avec la configuration de référence Ω_0 . On suppose que le matériau obéit à la loi de comportement thermoélastique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\operatorname{div} \underline{\underline{\xi}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} - \kappa(T - T_0) \underline{\underline{I}} \quad (9.9)$$

où $\underline{\underline{\xi}}$ est le champ de déplacement, $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur des petites déformations, T le champ de température et κ un coefficient caractérisant la dilation thermique du matériau.

- 8) On néglige les forces de gravité. Écrire les équations d'équilibre obtenues avec cette loi de comportement.
- 9) On suppose que les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega_0$ s'écrivent $\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} - (\underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}}) \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ lorsque $\underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} < 0$ et $\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ sinon. Décrire brièvement le montage mécanique modélisé par ces conditions aux limites.
- 10) On cherche une solution de la forme $\underline{\underline{\xi}} = W(z^3 - l^2 z) \underline{\underline{e}}_z$. Calculer W pour que ce champ de déplacement soit solution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.
- 11) Calculer le champ $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}})$ des forces de surface exercées sur la surface S_+ .
- 12) En déduire une condition sur τ_0 pour que $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}} < 0$ sur S_+ et S_- .
- 13) Calculer le champ $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{x}})$ des forces de surface exercées sur la surface S_1 .
- 14) Montrer que $\underline{\underline{\xi}}$ est solution du problème thermoélastique si et seulement si $\tau_0 > \tau_c$ où τ_c est une constante que l'on précisera.
- 15) Donner des arguments permettant d'expliquer la forme en "tonneau" que prend la pastille lorsque τ_0 est légèrement inférieur à τ_c .

Corrigé page 54

PROBLÈME 9.22

Tenseur des contraintes visqueuses nul

On considère un fluide newtonien dont la loi de comportement est $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{D}}) = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$, où $p(\underline{\underline{x}}, t)$ est le champ de pression et $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu_n \underline{\underline{D}}$ le champ de tenseurs des contraintes visqueuses. On cherche à caractériser les écoulements pour lesquels $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{0}}$. On considère le repère orthonormé direct $(\underline{\underline{e}}_x, \underline{\underline{e}}_y, \underline{\underline{e}}_z)$, une origine $\underline{\underline{0}}$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'espace.

Écoulements à taux de déformation nuls

- 1) On considère l'écoulement $\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{x}}) = U(z) \underline{\underline{e}}_x$. Décrire la famille des profils $U(z)$ pour lesquels $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$.
- 2) Décrire l'ensemble des champs $\underline{\underline{U}}(\underline{\underline{x}})$ dont le gradient $\underline{\underline{K}}(\underline{\underline{x}})$ est nul.

- 3) On considère l'écoulement $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + \underline{\omega}^{(0)} \wedge \underline{x}$ où $\underline{U}^{(0)}$ et $\underline{\omega}^{(0)}$ sont des vecteurs constants. Montrer que tenseur des taux de rotation associé est un tenseur constant $\underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ et donner la valeur de $\underline{\underline{D}}$.
- 4) On considère un champ de vitesse quelconque $\underline{U}(\underline{x})$. Écrire les conditions satisfaites par les dérivées $\frac{\partial U_i}{\partial x_n}$ lorsque le tenseur des taux de déformation associé $\underline{\underline{D}}(\underline{x})$ est nul.
- 5) En déduire la valeur de $\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_n}$ où les Ω_{ij} sont les composantes du tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x})$.
- 6) Décrire l'ensemble des champs de vitesse $\underline{U}(\underline{x})$ dont le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ est nul.

Hypothèse de Stokes

On note T l'ensemble des tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{A}}$, T_s le sous-ensemble des tenseurs sphériques qui s'écrivent $\underline{\underline{A}} = s \underline{\underline{I}}$ et T_d le sous-ensemble des tenseurs déviatoriques qui vérifient $\text{tr}(\underline{\underline{A}}) = 0$.

- 7) Montrer que l'on peut décomposer tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ en une somme $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{(\text{sph})} + \underline{\underline{A}}^{(\text{dev})}$ avec $\underline{\underline{A}}^{(\text{sph})} \in T_s$ et $\underline{\underline{A}}^{(\text{dev})} \in T_d$. Exprimer $\underline{\underline{A}}^{(\text{sph})}$ et $\underline{\underline{A}}^{(\text{dev})}$ en fonction de $\underline{\underline{A}}$.
- 8) Montrer que T_s et T_d sont des espaces vectoriels de T et que l'on a $T = T_s \oplus T_d$.
- 9) On suppose que pour tout $\underline{\underline{D}} \in T_s$, le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$ est nul. En déduire une relation entre λ_n et μ_n .

Écoulement à taux de déformations sphériques

On suppose que le tenseur $\underline{\underline{D}}(\underline{x})$ associé au champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x})$ est de la forme $\underline{\underline{D}}(\underline{x}) = s(\underline{x}) \underline{\underline{I}}$ où $s(\underline{x})$ est un champ a priori quelconque.

- 10) On considère un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement autour d'une trajectoire $\underline{x}(t)$. Comparer la forme de $\delta\mathcal{V}(t)$ et celle de $\delta\mathcal{V}(t + dt)$ lorsque dt est petit.
- 11) Écrire les relations vérifiées par les quantités $\frac{\partial U_i}{\partial x_n}$ pour $i \neq n$.
- 12) En déduire que $\underline{\underline{\Omega}}$ est un tenseur constant que l'on notera $\underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$.
- 13) Montrer que le gradient du nouveau champ de vitesse défini par $\tilde{\underline{U}}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x}) - \underline{\underline{\Omega}}^{(0)} \underline{x}$ est un tenseur sphérique.
- 14) En déduire la valeur de certaines dérivées $\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j}$.
- 15) Montrer que si $\tilde{\underline{U}}(\underline{x}) = U(x)\underline{e}_x + V(y)\underline{e}_y + W(z)\underline{e}_z$ avec $\tilde{\underline{\underline{D}}}(\underline{x}) = s(\underline{x}) \underline{\underline{I}}$, alors $\tilde{\underline{U}}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + s^{(0)} \underline{x}$ où $s^{(0)}$ est une constante et $\underline{U}^{(0)}$ un vecteur vitesse constant.
- 16) En déduire l'ensemble de tous les champs de vitesses $\underline{U}(\underline{x})$ tels que $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{0}}$, en supposant que $\lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n$. Montrer que c'est un espace vectoriel et indiquer sa dimension.

Corrigé page 55

EXERCICE 9.23 Écoulements radiaux

On considère le repère orthonormé direct $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, une origine $\underline{0}$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'espace. On définit $\underline{e}_r(\underline{x}) = \underline{x}/\|\underline{x}\|$ le vecteur unitaire défini partout sauf en $\underline{0}$ et $R(\underline{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dans ce problème, on note $F(r)$ une fonction, $B(\underline{x})$ un champ scalaire et $\underline{V}(\underline{x})$ un champ vectoriel quelconques.

- 1) Choisir la bonne expression de chacun des champs de la colonne de gauche du tableau 1.

	(a) :=	(b) :=	(c) :=
$\underline{\text{grad}} \underline{x}^2$	$2\underline{x}$	\underline{x}	$\underline{x} \otimes \underline{x}$
$\underline{\text{grad}} [F(B)]$	$F'(B) + \underline{\text{grad}} B$	$F'(B) \underline{\text{grad}} B$	$F'(B) \otimes \underline{\text{grad}} B$
$\underline{\text{grad}} B^n$	$n B^{n-1} \underline{\text{grad}} B$	$(n-1) B^n \underline{\text{grad}} B$	$(n-1) \underline{x} \otimes \underline{\text{grad}} B^{n-1}$
$\underline{\text{grad}} (R^{2n})$	$2n R^{2(n-1)} \underline{e}_r$	$2n R^{2(n-1)} \underline{x}$	$2n R^{2n-1} \underline{x}$
$\underline{\text{grad}} R$	\underline{e}_r	$R^{-2} \underline{e}_x$	\underline{x}

Table 9.6: Calcul du gradient de cinq champs scalaires

- 2) Choisir la bonne expression pour chacun des champs de la colonne de gauche du tableau 2.

	(a) :=	(b) :=	(c) :=
$\underline{\text{grad}} (\underline{x})$	\underline{I}	$3\underline{I}$	$\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$
$\underline{\text{grad}} (B \underline{V})$	$\underline{\text{grad}} B \otimes \underline{V} + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$	$\underline{V} \otimes \underline{\text{grad}} B + B \underline{\text{grad}} \underline{V}$	$B \underline{\text{grad}} \underline{V}$
$\underline{\text{grad}} (R^n \underline{x})$	$n R^n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + R^n \underline{I}$	$n R^n \underline{x} \otimes \underline{x} + R^n \underline{I}$	$n R^n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$
$\underline{\text{grad}} (\underline{e}_r)$	$\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$	$\frac{1}{R} \underline{I} + \frac{1}{R^3} \underline{x} \otimes \underline{x}$	$\frac{1}{R} (\underline{I} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$
$\underline{\text{grad}} [F(R) \underline{e}_r]$	$F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{F(R)}{R} (\underline{I} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$	$F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{F(R)}{R} (\underline{I} + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$	$F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$

Table 9.7: Calcul du gradient de cinq champs de vecteurs

- 3) On considère l'écoulement défini par $\underline{U}(\underline{x}) = F[R(\underline{x})] \underline{e}_r(\underline{x})$ pour \underline{x} non nul et $\underline{U}(\underline{0}) = \underline{0}$. On suppose que $F(0) = 0$. Décrire la famille des profils $F(r)$ pour laquelle $\underline{D}(\underline{x}) = s[R(\underline{x})] \underline{I}$.

Corrigé page 56

Corrigé 0.1 Cylindre thermoélastique**Équilibre thermique**

1) Le vecteur flux de chaleur est $\underline{Q} = -k \underline{\text{grad}} T = k A z \underline{e}_z$. Il sort de S_+ le flux de chaleur $\underline{Q}_+ = \iint_{S_+} \underline{Q} \cdot \underline{e}_z dS = \pi b^2 l k A$. 2) Il sort de S_- le même

flux de chaleur $\mathcal{Q}_+ = \mathcal{Q}_-$. **3)** Il sort de S_1 le flux nul $\mathcal{Q}_1 = 0$, car $\underline{Q} \cdot \underline{e}_r = 0$ pour toute normale horizontale \underline{e}_r . **4)** Le bilan d'énergie interne s'écrit $0 = r - \text{div } \underline{Q} = r + k \Delta T = r - kA$. **5)** On a donc $r = kA$ qui est constant. **6)** La réaction nucléaire fournit la puissance $\mathcal{P} = \iint_{\Omega} r \, d^3x = 2\pi b^2 l r = 2\pi b^2 l kA$. **7)** On vérifie que l'on a bien $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_+ + \mathcal{Q}_- + \mathcal{Q}_1$. La puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{the}}(\Omega) = \iint_{\Omega} r \, d^3x - \int_{\partial\Omega} \underline{Q} \cdot \underline{n} \, dS = 0$ est bien nulle car on est à l'équilibre.

Comportement thermoélastique

8) Les équations d'équilibre s'écrivent $\text{div } \underline{\sigma} = (\lambda + \mu) \text{grad } (\text{div } \underline{\xi}) + \mu \Delta \underline{\xi} - \kappa \text{grad } T = \underline{0}$. **9)** La pastille est confinée dans un domaine indéformable qui occupe le volume Ω_0 . Les configurations déformées doivent vérifier $\Omega \subset \Omega_0$. Les parties de $\partial\Omega$ qui ne sont pas en contact avec l'enceinte sont libres de contraintes ($\underline{T} = \underline{0}$). En cas de contact, le déplacement normal est nul et les contraintes tangentielles sont nulles. Il s'agit d'un contact unilatéral avec glissement. **10)** On a $\text{div } \underline{\xi} = W(3z^2 - l^2)$. L'équation d'équilibre s'écrit $[6W(\lambda + \mu) + 6W\mu + \kappa A] \underline{e}_z = \underline{0}$. On en déduit que $W = -\frac{\kappa A}{6(\lambda + 2\mu)}$. **11)** On a $\underline{\sigma} = W(3z^2 - l^2)(\lambda \underline{I} + 2\mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) - \kappa \left(\tau_0 - \frac{A}{2} z^2 \right) \underline{I}$. Sur la face S_+ , d'équation $z = l$, on peut donc écrire $\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{e}_z = 2(\lambda + 2\mu) W l^2 \underline{e}_z - \kappa \left(\tau_0 - \frac{A}{2} l^2 \right) \underline{e}_z$. En remplaçant W par sa valeur, on obtient $\underline{T} = -\kappa \left(\tau_0 - \frac{A}{2} l^2 + \frac{A}{3} l^2 \right) \underline{e}_z = -\kappa \left(\tau_0 - \frac{Al^2}{6} \right) \underline{e}_z$. **12)** Pour $\tau_0 > \frac{Al^2}{6}$, on a $\underline{T} \cdot \underline{n} < 0$ sur S_+ . Par symétrie, le contact est également effectif sur S_- . **13)** Étant donnée une normale horizontale \underline{e}_r , on peut écrire $\underline{\sigma} \underline{e}_r = \lambda W(3z^2 - l^2) \underline{e}_r - \kappa \left(\tau_0 - \frac{A}{2} z^2 \right) \underline{e}_r$. En remplaçant W par sa valeur et après quelques manipulations, on obtient $\underline{T} = -\kappa \left(\tau_0 - A \frac{6\mu z^2 + \lambda l^2}{6(\lambda + 2\mu)} \right) \underline{e}_r$. **14)** Sur S_1 , le maximum de la fonction $6\mu z^2 + \lambda l^2$ est atteint pour $|z| = l$ et vaut $(6\mu + \lambda)l^2$. Pour $\tau > \tau_c$ avec $\tau_c = \sup \left(\frac{Al^2}{6}, \frac{\lambda + 6\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{Al^2}{6} \right)$, on a $\underline{T} \cdot \underline{n} < 0$ sur toutes les faces. Le champ de déplacement considéré est donc solution du problème. **15)** Pour $\tau_0 < \tau_c$, le contact sera d'abord perdu sur la face S_1 au voisinage des extrémités $|z| = l$ alors que la partie centrale reste en contact avec l'enceinte. La pastille prend donc la forme d'un tonneau.

Corrigé 0.2

Tenseur des contraintes visqueuses nul

Écoulements à taux de déformation nuls

1) Comme $D_{13} = U'(z) = 0$, on a $\underline{U}(\underline{x}) = U^{(0)} \underline{e}_x$ où $U^{(0)}$ est une constante. **2)** Comme $\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0$, on a $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)}$ où $\underline{U}^{(0)}$ est un vecteur constant. **3)** On a $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + \underline{\Omega}^{(0)} \underline{x}$ où $\underline{\Omega}^{(0)}$ est le tenseur antisymétrique de vecteur rotation $\underline{\omega}^{(0)}$. On a donc $\underline{D}(\underline{x}) = \underline{0}$. **4)** Si $D_{in} = 0$, on a $\frac{\partial U_i}{\partial x_n} = -\frac{\partial U_n}{\partial x_i}$. **5)** On a $2 \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_n \partial x_j} - \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_n \partial x_i} = -\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_j \partial x_i} = 0$. **6)** On en déduit que $\underline{\Omega}(\underline{x}) = \underline{\Omega}^{(0)}$ est un tenseur constant.

Hypothèse de Stokes

7) On a $\underline{A}^{(\text{sph})} = \frac{1}{3} \text{tr } (\underline{A}) \underline{I}$ qui est bien sphérique et $\underline{A}^{(\text{dev})} = \underline{A} - \frac{1}{3} \text{tr } (\underline{A}) \underline{I}$ dont la trace est bien nulle. **8)** Ces expressions montrent que la décomposition

est unique. **9)** Comme $\underline{\tau}(\underline{D})$ dépend linéairement de \underline{D} , on a donc $\underline{\tau}(\underline{I}) = (3\lambda_n + 2\mu_n)\underline{I}$, ce qui entraîne l'hypothèse de Stokes $\lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n$.

Écoulement à taux de déformations sphériques

10) Le volume $\delta\mathcal{V}(t+dt)$ a la même forme que $\delta\mathcal{V}(t)$ et a subi dilatation d'un facteur $[1 + s[\underline{x}(t) dt]]$. **11)** Comme $D_{in} = 0$ pour $i \neq n$, on a $\frac{\partial U_i}{\partial x_n} = \frac{\partial U_n}{\partial x_i}$.

12) On en déduit que $\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_n} = 0$ pour $i \neq j$ et donc que $\underline{\Omega}(\underline{x}) = \underline{\Omega}^{(0)}$ est un tenseur constant. **13)** Si $\underline{K}(\underline{x})$ est le gradient de $\underline{U}(\underline{x})$, le gradient du nouveau champ est $\underline{K}(\underline{x}) - \underline{\Omega}^{(0)} = \underline{D}(\underline{x}) = s(\underline{x})\underline{I}$. **14)** Le gradient de $\tilde{\underline{U}}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x}) - \underline{\Omega}^{(0)}$

étant diagonal, on a $\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial x_3} = 0$, ce qui impose que $\tilde{U}_1(x, y, z) = U(x)$. On démontre de même que $\tilde{U}_2(x, y, z) = V(y)$ et $\tilde{U}_3(x, y, z) = W(z)$. **15)** Comme

$D_{11} = D_{22} = D_{33} = s(\underline{x})$, on a $U'(x) = V'(y) = W'(z) = s(x, y, z)$. On en déduit que $s(\underline{x}) = s^{(0)}$ est une constante et donc que $U(x) = U^{(0)} + s^{(0)}x$, $V(y) = V^{(0)} + s^{(0)}y$ et $W(z) = W^{(0)} + s^{(0)}z$. **16)** La relation $\underline{\tau}(\underline{D}) = \underline{0}$

s'écrit $\underline{D} = -\frac{\lambda_n}{2\mu_n} \text{tr}(\underline{D})\underline{I}$. Pour $\lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n$, on a $\underline{D} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{D})\underline{I} = \underline{D}^{(sph)}$.

On pose $s(\underline{x}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{D})$ de manière à écrire $\underline{D}(\underline{x}) = s(\underline{x})\underline{I}$. D'après la question 13, les champs de vitesse \underline{U} qui admettent un tenseur des taux de déformation $\underline{D}(\underline{x}) = s(\underline{x})\underline{I}$ sphérique ont un tenseur des taux de rotation $\underline{\Omega}^{(0)}$ constant. La question 14 montre que l'on a $\tilde{\underline{U}}(\underline{x}) = U(x)\underline{e}_x + V(y)\underline{e}_y + W(z)\underline{e}_z$.

La question 15 montre que l'on a $\tilde{\underline{U}}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + s^{(0)}\underline{x}$. En conclusion, les champs de vitesse qui annulent $\underline{\tau}$, sous l'hypothèse de Stokes, sont de la forme $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + \underline{\omega}^{(0)} \wedge \underline{x} + s^{(0)}\underline{x}$ où $\underline{U}^{(0)}$, $\underline{\omega}^{(0)}$ et $s^{(0)}$ sont constants. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 7.

Corrigé 0.3 Écoulements radiaux

1) ababa : a) $\text{grad } \underline{x}^2 = 2\underline{x}$, b) $\text{grad } [F(B)] = F'(B)\text{grad } B$, a) $\text{grad } B^n = n B^{n-1} \text{grad } B$ en posant $F(B) = B^n$, b) $\text{grad } (R^{2n}) = 2n R^{2(n-1)} \underline{x}$ en posant $B(\underline{x}) = R(\underline{x})$ et a) $\text{grad } R = \underline{e}_r$ en posant $n = \frac{1}{2}$. **2) abaca :** a) $\text{grad } (\underline{x}) = \underline{I}$, b) $\text{grad } (B \underline{V}) = \underline{V} \otimes \text{grad } B + B \text{grad } \underline{V}$ car $\frac{\partial (B V_i)}{\partial x_j} = B \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial x_j} V_i$, a) $\text{grad } (R^n \underline{x}) = n R^n \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + R^n \underline{I}$ en posant $B(\underline{x}) = R^n(\underline{x})$, c) $\text{grad } (\underline{e}_r) = \frac{1}{R}(\underline{I} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$ en posant $n = -1$ et a) $\text{grad } [F(R) \underline{e}_r] = F'(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{F(R)}{R}(\underline{I} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$ en posant $\underline{e}_r = \underline{V}$.

EXAMEN 2004

L'examen 2004 était constitué du problème "Tourbillons en repère tournant". Il reposait fortement sur les acquis du problème "Calcul tensoriel axisymétrique 2D" du partiel 2004.

PROBLÈME 9.27 Tourbillons en repère tournant

Calcul tensoriel axisymétrique 2D

On note $R(\underline{x}) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\underline{e}_r(\underline{x}) = \frac{1}{R(\underline{x})} \underline{x}$ et $\underline{e}_\theta(\underline{x}) = \frac{1}{R(\underline{x})} \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{x}$.

- 1) Démontrer la relation : $\underline{\text{grad}} [F(R) \underline{e}_\theta] = F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$.

Écoulements circulaires

On considère un champ de vitesse bidimensionnel $\underline{U}(\underline{x}) = F[R(\underline{x})] \underline{e}_\theta(\underline{x})$ défini pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_*^2$ où $F(R)$ est une fonction quelconque de R .

- 2) Dessiner les trajectoires.
- 3) Calculer les composantes de la matrice 2×2 gradient $\underline{K}(x, y) = \underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x})$ dans la base $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)})$ ou bien dans la base $[\underline{e}_r(\underline{x}), \underline{e}_\theta(\underline{x})]$.
- 4) Calculer $\text{div } \underline{U}$.
- 5) Calculer les composantes du tenseur des taux de rotations $\underline{\Omega}(x, y)$ dans la base $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)})$ ou bien la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}^{(3)})$. On pourra poser $G(R) = \frac{1}{2}[F'(R) + F(R)/R]$.
- 6) En déduire que le vecteur rotation s'écrit $\underline{\omega}(\underline{x}) = \omega_3(\underline{x}) \underline{e}^{(3)}$ où $\omega_3(\underline{x})$ est un champ scalaire que l'on exprimera en fonction de $F(R)$ et $R(\underline{x})$.
- 7) Calculer les composantes du tenseur des taux de déformation $\underline{D}(x, y)$ dans la base $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)})$ ou bien la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}^{(3)})$. On pourra poser $H(R) = \frac{1}{2}[F'(R) - F(R)/R]$.
- 8) En déduire le taux de glissement $\frac{d\gamma_{r\theta}}{dt}(t)$ des directions orthogonales \underline{e}_r et \underline{e}_θ en fonction de $F(R)$ et $R(\underline{x})$.

On s'intéresse aux tourbillons tels que $\underline{\Omega}(\underline{x}) = \underline{0}$ pour tout \underline{x} .

- 9) Donner la forme de $F(R)$. On notera A une constante arbitraire.
- 10) Calculer $\frac{d\gamma_{r\theta}}{dt}(t)$ dans ce cas.
- 11) Donner pour ce cas l'expression d'une fonction de courant $\psi(\underline{x})$ définie par la relation $\underline{U} = \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{\text{grad}} \psi$.

On s'intéresse aux tourbillons vérifiant donc $\underline{D}(\underline{x}) = \underline{0}$ pour tout \underline{x} .

- 12) Donner la forme de $F(R)$. On notera Ω une constante arbitraire.
- 13) Calculer $\omega_3(\underline{x})$ dans ce cas et interpréter le mouvement.
- 14) Donner pour ce cas l'expression d'une fonction de courant $\psi(\underline{x})$ définie par la relation $\underline{U} = \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{\text{grad}} \psi$.

Fluide parfait incompressible

On suppose que l'écoulement $\underline{U}(\underline{x})$ est celui d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ_0 . On note $p(\underline{x})$ le champ de pression.

- 15) Calculer l'expression de l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$ en fonction de \underline{e}_r .
- 16) En déduire l'expression du gradient de pression en fonction de \underline{e}_r .
- 17) Donner l'expression de la pression pour le cas d'un tourbillon tel que $F(R) = \Omega R$.
- 18) Donner l'expression de la pression pour le cas d'un tourbillon tel que $F(R) = A/R$.

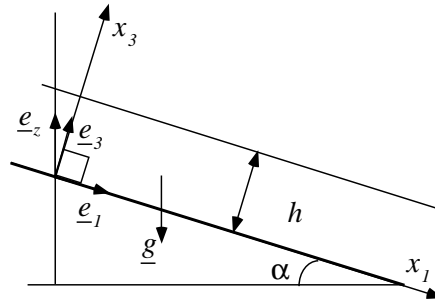
Corrigé page 58

EXERCICE 9.28 Solide élastique sur un plan incliné

On considère un milieu continu occupant le domaine

$$\Omega = \left\{ \underline{x} = x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}^{(3)} \quad \text{tel que} \quad 0 \leq x_3 \leq h \right\} \quad (9.10)$$

qui décrit une couche infinie d'épaisseur h constante. On suppose que l'axe Ox_1 fait un angle α avec l'horizontale et que la gravité s'exprime donc $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ avec $\underline{e}_z = -\sin \alpha \underline{e}^{(1)} + \cos \alpha \underline{e}^{(3)}$.



On suppose que le poids du milieu continu, de masse volumique ρ , induit une déformation infinitésimale de la forme :

$$\underline{\xi}(x_1, x_2, x_3) = \zeta(x_3) \underline{e}^{(1)} + \chi(x_3) \underline{e}^{(3)} \quad (9.11)$$

où $\zeta(x_3)$ et $\chi(x_3)$ sont des fonctions que l'on cherche à déterminer. On note Ω_0 , la configuration de référence dont est issue Ω . Il n'y a pas de mouvement. On suppose que le comportement rhéologique du milieu est celui d'un matériau élastique linéaire isotrope et on note λ et μ ses coefficients de Lamé. Le solide adhère à la paroi pour $x_3 = 0$. Il est en contact avec l'air sur la face $x_3 = h$ et l'on suppose que la pression atmosphérique p_a est constante.

- 1) Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x})$.
- 2) En déduire l'expression de l'équilibre des forces.
- 3) Écrire les conditions aux limites en $x_3 = 0$ et $x_3 = h$.
- 4) En déduire les profils de déplacement $\zeta(x_3)$ et $\chi(x_3)$.
- 5) Calculer la force surfacique \underline{T} exercée par le plan incliné sur le solide élastique.
- 6) Commenter ce dernier résultat.

Corrigé page 59

Corrigé Tourbillons en repère tournant**Calcul tensoriel axisymétrique 2D**

- 1) La démonstration de cette relation est effectuée dans le "Partiel 2004".

Écoulements circulaires

2) Les trajectoires sont des cercles de centre $\underline{0}$. 3) En utilisant le dernier résultats de la question 5, on a $\underline{K} = F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$. Les composantes de \underline{K} dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ sont donc $\begin{pmatrix} 0 & -F(R)/R \\ F'(R) & 0 \end{pmatrix}$. Les composantes dans la base $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)})$ s'obtiennent en remplaçant $\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta$ et $\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$ par leurs expressions matricielles dans cette base. On peut aussi écrire $\underline{U} = \frac{F(R)}{R}(-y, x)$ dans la base $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)})$ et calculer les composantes $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Cette dernière méthode est cependant plus fastidieuse en terme de calculs. 4) En prenant la trace de \underline{K} dans l'une ou l'autre des bases, on obtient $\text{div } \underline{U} = 0$. 5) La partie antisymétrique de \underline{K} est $\underline{\Omega} = \frac{1}{2}[F'(R) + F(R)/R] (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta)$, c'est-à-dire $\underline{\Omega} = G(R) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}^{(3)})$ avec $G(R) = \frac{1}{2}[F'(R) + F(R)/R]$. 6) Comme $\Omega_{r\theta} + \omega_3 = 0$, on voit que $\underline{\omega} = \omega_3 \underline{e}^{(3)}$ avec $\omega_3(\underline{x}) = G(R)$. 7) La partie symétrique de \underline{K} est $\underline{D} = \frac{1}{2}[F'(R) - F(R)/R] (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta)$, c'est-à-dire $\underline{D} = H(R) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}^{(3)})$ avec $H(R) = \frac{1}{2}[F'(R) - F(R)/R]$. 8) On en déduit que $\frac{d\gamma_{r\theta}}{dt}(t) = 2 H(R)$. 9) Le tourbillon irrotationnel ($\underline{\Omega} = \underline{0}$) vérifie $G(R) = 0$ c'est-à-dire $F'(R) = -F(R)/R$ que l'on intègre en $F(R) = A/R$. 10) Dans ce cas $\frac{d\gamma_{r\theta}}{dt}(t) = 2 H(R) = F'(R) - F(R)/R = -2 A/R^2$. 11) En posant $\psi(\underline{x}) = -A \text{Ln}[R(\underline{x})]$, on a $\text{grad } \psi = -A/R \underline{e}_r$ et donc $\underline{U}(\underline{x}) = -\frac{A}{R(\underline{x})} \underline{e}^{(3)} \wedge \psi(\underline{x})$. 12) Le tourbillon sans déformation vérifie $H(R) = 0$, c'est-à-dire $F'(R) = F(R)/R$ que l'on intègre en $F(R) = \Omega R$. 13) On a $\omega_3 = \Omega$. Le mouvement est celui d'une rotation solide de vitesse angulaire Ω . 14) En posant $\psi(\underline{x}) = \frac{\Omega}{2} R^2(\underline{x})$, on obtient $\text{grad } \psi = \Omega R(\underline{x}) \underline{e}_r(\underline{x})$ et donc $\underline{U} = \Omega R \underline{e}_\theta = \underline{e}^{(3)} \wedge \text{grad } \psi$.

Fluide parfait incompressible

15) L'accélération s'écrit $\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{K} \underline{U} = \left[F'(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \frac{F(R)}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta \right] F(R) \underline{e}_\theta = -\frac{F^2(R)}{R} \underline{e}_r$. 16) La conservation de la quantité de mouvement s'écrit $\rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } p$, c'est-à dire $\text{grad } p = \rho_0 \frac{F^2(R)}{R} \underline{e}_r$. 17) L'équation $\text{grad } p = \rho_0 \Omega^2 R \underline{e}_r$ entraîne que $p(\underline{x}) = p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \Omega^2 R^2(\underline{x})$. 18) L'équation $\text{grad } p = \rho_0 \frac{A^2}{R^3} \underline{e}_r$ entraîne que $p(\underline{x}) = p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{A^2}{R^2(\underline{x})}$.

Corrigé Solide élastique sur un plan incliné

1) Le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \lambda \chi'(x_3) & 0 & \mu \zeta'(x_3) \\ 0 & \lambda \chi'(x_3) & 0 \\ \mu \zeta'(x_3) & 0 & t(\lambda + 2\mu) \chi'(x_3) \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit encore $\underline{\sigma} = \lambda \chi' \underline{e}^{(1)} \otimes \underline{e}^{(1)} + \lambda \chi' \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + (\lambda + 2\mu) \chi' \underline{e}^{(3)} \otimes \underline{e}^{(3)} + \mu \zeta' (\underline{e}^{(3)} \otimes \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(1)} \otimes \underline{e}^{(3)})$. **2)** Le principe fondamental entraîne $\text{div } \underline{\sigma}(\underline{x}) + \rho \underline{g} = [\mu \zeta''(x_3) + \rho g \sin \alpha] \underline{e}^{(1)} + [(\lambda + 2\mu) \chi''(x_3) - \rho g \cos \alpha] \underline{e}^{(3)} = \underline{0}$. **3)** Les conditions aux limites $\underline{\xi}(x_1, x_2, 0) = \underline{0}$ et $\underline{\sigma}(x_1, x_2, h) \cdot \underline{e}^{(3)} = -p_a \underline{e}^{(3)}$ entraînent $\zeta(0) = \chi(0) = 0$, $\zeta'(h) = 0$ et $(\lambda + 2\mu) \chi'(h) = -p_a$. **4)** On en déduit les profils de déplacements suivants : $\zeta(x_3) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} x_3 (x_3 - 2h)$ et $\chi(x_3) = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\rho g \cos \alpha}{2} x_3 (x_3 - 2h) - p_a x_3 \right]$. **5)** On en déduit que la paroi exerce sur le milieu élastique la contrainte

$$\underline{T} = -\underline{\sigma} \cdot \underline{e}^{(3)} = \rho g h (-\sin \alpha \underline{e}^{(1)} + \cos \alpha \underline{e}^{(3)}) + p_a \underline{e}^{(3)} = -\rho g h + p_a \underline{e}^{(3)}.$$

6) Cette contrainte se trouve être la somme du poids du milieu par unité de surface et de l'opposé de la pression exercée sur la surface en contact avec l'atmosphère.

EXAMEN 2003

L'examen 2003 était constitué du problème "Rotation dans les fluides et les solides". Il reposait fortement sur les acquis du problème "Rotation dans les fluides" du partiel 2003.

PROBLÈME 9.31

Rotation dans les fluides et les solides

Rotations dans un solide

On considère un solide élastique homogène et isotrope dont la configuration de référence est exempte de contraintes et occupe le volume :

$$\Omega_0 = \{ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 : 0 < R_1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq R_2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq l \}.$$

On définit les coordonnées polaires (R, Θ) par le changement de variables $(a_1, a_2) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$. On définit ensuite $\underline{e}_R(\Theta) = \cos \Theta \underline{e}^{(1)} + \sin \Theta \underline{e}^{(2)}$ et $\underline{e}_\Theta(\Theta) = -\sin \Theta \underline{e}^{(1)} + \cos \Theta \underline{e}^{(2)}$.

On examine une première déformation dont le champ de déplacement est $\underline{\xi}(\underline{a}) = \alpha R \underline{e}_\Theta(\Theta)$ en coordonnées polaires. On suppose que $\alpha \ll 1$.

- 1) Décrire et dessiner le volume Ω occupé par la configuration déformée.
- 2) Calculer le tenseur des petites déformations associé à cette déformation.
- 3) Calculer les tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ pour tout point de Ω .

On considère une seconde déformation pour laquelle le champ de déplacement s'écrit $\underline{\xi}(\underline{a}) = \frac{\beta}{2\pi R} \underline{e}_\Theta(\Theta)$. On suppose que $0 < \beta \ll R_2^2$. On note λ et μ les coefficients de Lamé de la loi de Hooke.

- 4) Décrire le volume Ω occupé par la configuration déformée.
- 5) Calculer le tenseur des petites déformations associé à cette petite déformation.
- 6) Calculer les tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ pour tout point de Ω .

- 7) On suppose que le solide est à l'équilibre dans cet état déformé. En déduire les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{a})$.
- 8) Calculer et dessiner les forces de contacts surfaciques exercées sur chacune des faces (courbes et plates) de la frontière de Ω par son extérieur.
- 9) Calculer les couples (circulation ou moment par rapport à l'axe) exercés par ces forces de contact pour chacune des faces, ainsi que le couple total.

Écoulements incompressibles à surface libre

On considère un écoulement à surface libre occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq x_3 \leq h(r) \text{ avec } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$$

où R_m est le rayon de la cuve et $h(r)$ le profil de la surface libre que l'on cherche à déterminer. Le champ de gravité $-g \underline{e}^{(3)}$ est parallèle à l'axe de la cuve. On suppose que la cuve est remplie d'un fluide incompressible de masse volumique homogène ρ_0 , et animé du mouvement $\underline{U}(r, \theta, x_3) = V(r) \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, x_3) sont les coordonnées cylindriques et $V(r)$ un profil de vitesse.

Dans un premier temps, on suppose que le fluide est visqueux et que le mouvement vérifie $V(r) = \omega r$.

- 10) Écrire les équations de Navier-Stokes incompressibles en coordonnées cartésiennes en remplaçant le champ de vitesse par son expression.
- 11) Indiquer l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ en fonction du champ de pression p pour l'instant indéterminé.
- 12) On suppose que la pression atmosphérique p_a est constante. Indiquer la condition aux limites que l'on doit imposer sur la surface libre d'équation $x_3 = h(r)$ en supposant la continuité des forces de contact.
- 13) Montrer que le champ de pression s'écrit sous la forme $p = p_c(x_3, t) + \beta(x_1^2 + x_2^2)$ où β est une constante que l'on explicitera.
- 14) Préciser le profil de pression $p_c(x_3, t)$ en appliquant la condition aux limites en $\underline{x} = h_0 \underline{e}^{(3)}$ en supposant que $h(0) = h_0$ est connu.
- 15) En déduire la forme de cette surface libre. En faire un tracé schématique.
- 16) On suppose $\omega = .5$ Hz, $R_m = 1$ m. Calculer la différence de hauteur maximale entre les points de la surface libre pour $g = 9.81$ m/s².

On suppose maintenant que le fluide est parfait avec $V(r) = \frac{\gamma}{2\pi r}$, en excluant les points $\|\underline{x}\| \leq r_0$ où $r_0 < R_m$ est une constante.

- 17) Écrire les équations d'Euler incompressibles en coordonnées cylindriques en remplaçant les champs de vitesse et d'accélération par leurs expressions. On rappelle que $\underline{\text{grad}} = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_3}$.
- 18) Indiquer l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ dans le fluide.
- 19) On suppose que la pression atmosphérique p_a est constante. Indiquer la condition aux limites que l'on doit imposer sur la surface libre d'équation $x_3 = h(r)$.

- 20) Donner l'expression de la pression en appliquant cette condition aux limites aux points de la surface libre vérifiant $r = R_m$ en supposant que $h(R_m) = h_m$ est connu.
- 21) En déduire la forme de cette surface libre. En faire un tracé schématique.
- 22) On suppose $r_0 = 1$ cm, $h_m = 10$ cm et $R_m = 1$ m. Calculer la valeur de γ telle que $h(r_0) = 0$.

Écoulements compressible à toit rigide

On considère un écoulement occupant le volume

$$\Omega = \left\{ \underline{x} \text{ tels que } r \leq R_m \text{ et } 0 \leq x_3 \leq h_m \text{ avec } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$$

où R_m et h_m sont respectivement le rayon et la hauteur de la cuve à toit rigide. Le champ de gravité est $-g \underline{e}^{(3)}$. On suppose que la cuve fermée est entièrement remplie d'un fluide parfait compressible et que l'ensemble est animé du mouvement de rotation solide $\underline{U}(r, \theta, x_3) = \omega r \underline{e}_\theta(\theta)$ où (r, θ, x_3) sont les coordonnées cylindriques. On suppose que le fluide est un gaz parfait de masse molaire M . On suppose que la température $T = T_0$ est homogène et on cherche le champ de masse volumique solution sous une forme $\rho = \rho_e(r, x_3)$ qui ne dépend que de r et de x_3 .

- 23) Montrer que l'hypothèse $\rho = \rho_e(r, x_3)$ et le champ de vitesse proposé sont compatibles avec l'équation de conservation de la masse.
- 24) Ecrire les équations de conservation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques en remplaçant le champ de vitesse par sa valeur.
- 25) En éliminant p , déduire des équations d'état et des équations d'Euler compressibles que la masse volumique est de la forme $\rho_e(r, x_3) = \rho_c(x_3) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$ où α est une constante que l'on précisera.
- 26) On suppose que $\rho(\underline{0}, t) = \rho_e(0, 0) = \rho_0$ est connu. Donner l'expression du profil de masse volumique $\rho_c(x_3)$ au centre de la cuve.
- 27) En déduire l'expression du champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
- 28) Faire un tracé schématique des isobares dans un plan horizontal.

Corrigé

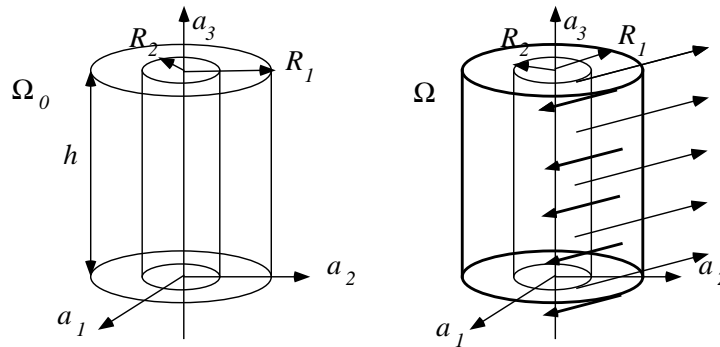
Rotation dans les fluides et les solides

Rotation dans un solide

1) On a $\Omega \sim \Omega_0$. C'est le volume compris entre deux cylindres de hauteur l de même axe et de rayons R_1 et R_2 . 2) On a $\xi_1(\underline{a}) = -\alpha a_2$ et $\xi_2(\underline{a}) = \alpha a_1$. On en déduit que $\underline{H}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit $\underline{\epsilon}(\underline{a}) = \underline{0}$ (partie symétrique de \underline{H}). 3) La loi de Hooke entraîne $\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \underline{I} + 2\mu \underline{\epsilon} = \underline{0}$. 4) On a toujours $\Omega \sim \Omega_0$. 5) En écrivant $\xi_1 = -B(a_1, a_2) a_2$, $\xi_2 = B(a_1, a_2) a_1$ et $\xi_3 = 0$ avec $B(a_1, a_2) = \frac{\beta}{2\pi} (a_1^2 + a_2^2)^2$, on peut exprimer \underline{H} , qui est symétrique et s'écrit

$$\underline{\underline{H}}(\underline{a}) = \frac{\beta}{2\pi} (a_1^2 + a_2^2)^{-2} \begin{pmatrix} 2 a_1 a_2 & a_2^2 - a_1^2 & 0 \\ a_2^2 - a_1^2 & -2 a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a}). \quad \mathbf{6})$$

Comme $\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0$, on a $\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$. **7)** Les équations de Lamé-Clapeyron (équations de Lamé à l'équilibre) s'écrivent $\underline{\underline{0}} = \underline{\underline{f}}(\underline{a}) + \underline{\underline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$. Le calcul conduit à $\underline{\underline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$ ce qui entraîne $\underline{\underline{f}}(\underline{a}) = \underline{\underline{0}}$. **8)** Si $\underline{n} = \underline{e}_R(\Theta)$, on a $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})\underline{n} = -\frac{\mu\beta}{\pi R^2}\underline{e}_\Theta$. Sur le cylindre de rayon R_1 , l'extérieur de Ω exerce donc des forces tangentielles surfacique d'intensité $\frac{\mu\beta}{\pi R_1^2}$ et tournant dans le sens trigonométrique. Sur le cylindre de rayon R_2 , l'extérieur de Ω exerce des forces tangentielles d'intensité $\frac{\mu\beta}{\pi R_2^2}$ et tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. Les forces de contact sont nulles sur les deux faces de normales $\pm\underline{e}^{(3)}$ (disques). **9)** La circulation $-2\mu\beta h$ des forces exercées sur la face $R = R_2$ compense exactement la circulation $2\mu\beta h$ exercée sur la face $R = R_1$. Il s'agit d'une déformation de torsion.


 Figure 9.7: Forces de contacts sur le domaine Ω

Écoulements incompressibles à surface libre

10) On a $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\omega x_2 \underline{e}^{(1)} + \omega x_1 \underline{e}^{(2)}$ pour le champ de vitesse, $\frac{d}{dt}\underline{U} = -\omega^2 (x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)})$ pour l'accélération et $\Delta \underline{U} = \underline{\underline{0}}$. Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent $\underline{\underline{\text{div}}}\underline{U} = 0$ et $\frac{d}{dt}\underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{\text{grad}}}\ p - g \underline{e}^{(3)} + \nu \Delta \underline{U}$. On vérifie que l'on a bien $\underline{\underline{\text{div}}}\underline{U} = 0$. Les équations de quantité de mouvement s'écrivent $-\omega^2 x_1 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1}$, $-\omega^2 x_2 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g$. **11)** Comme $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}}$, on a $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{I}$. **12)** On doit avoir $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p_a \underline{I}$ pour les points \underline{x} de la surface libre. On en déduit $p(\underline{x}, t) = p_a$ pour ces points. **13)** On déduit des équations de Navier-Stokes la relation $p(\underline{x}, t) = p_c(x_3, t) + \beta (x_1^2 + x_2^2)$ avec $\beta = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2$. **14)** En reportant dans l'équation de la quantité de mouvement verticale, on obtient $\frac{\partial}{\partial x_3} p_c = -\rho_0 g$, d'où $p_c(x_3, t) = p_a - \rho_0 g (x_3 - h_0)$. **15)** En appliquant la condition aux limites $p = p_a$ à tous les points de la surface libre $x_3 = h(r)$, on obtient $0 = -g[h(r) - h_0] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$ et donc $h(r) = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$. La surface libre a la forme d'un parabolôide de révolution. **16)** La différence est

$h(R_m) - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R_m^2 \sim 1.3$ cm. **17)** Les équations d'Euler incompressible s'écrivent $\text{div } \underline{U} = 0$ et $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p - g \underline{e}^{(3)}$. On a déjà montré que $\text{div } \underline{U} = 0$ et que l'accélération vérifie $\Gamma_r = -V^2(r)/r$ et $\Gamma_\theta = \Gamma_3 = 0$. Les équations s'écrivent alors $-\frac{\gamma^2}{4\pi^2 r^3} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g$. **18)** Comme le fluide est parfait, on a $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{I}$. **19)** On doit avoir $p(\underline{x}, t) = p_a$ pour tous les points de la surface libre. **20)** La projection sur les coordonnées horizontales entraîne $p = P(x_3, t) - \rho_0 \frac{\gamma^2}{8\pi^2 r^2}$. L'intégration dans la direction verticale et la conditions aux limites entraînent $p = p_a - \rho_0 g (x_3 - h_m) - \rho_0 \frac{\gamma^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_m^2} \right)$. **21)** L'application de la condition aux limites sur toute la surface entraîne $h(r) = h_m - \frac{\gamma^2}{8\pi^2 g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_m^2} \right)$. La surface libre a la forme d'un entonnoir. **22)** Si $h(r_0) = 0$, on a $\gamma^2 = 8\pi^2 g h_m \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R_m^2} \right)^2$ et donc $\gamma \sim 0,88$ m²/s.

Écoulements compressible à toit rigide

23) Les équations d'Euler s'écrivent $\frac{dp}{dt} = -\rho \text{div } \underline{U}$ et $\frac{d}{dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}^{(3)}$. Comme $\text{div } \underline{U} = 0$, on doit avoir $\frac{dp}{dt} = 0$. L'hypothèse $\rho = \rho_e(r, x_3)$ entraîne bien $\frac{dp}{dt} = \underline{U} \cdot \text{grad } \rho = \omega r \frac{\partial}{\partial \theta} \rho_e(r, x_3) = 0$. **24)** Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $-\omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$ et $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g$. **25)** L'équation d'état entraîne $p = \rho_e(r, x_3) \frac{R}{M} T_0$. On en déduit $\frac{RT_0}{M} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dr} = \omega^2 r$ et donc $\rho_e(r, x_3) = \rho_c(x_3) e^{\frac{\omega^2 r^2}{2\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{RT_0}{M}$. **26)** La relation hydrostatique entraîne $\frac{R}{M} T_0 \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial \rho_c}{\partial x_3} = -g$ et donc $\rho_c(x_3) = \rho_0 e^{-\frac{g x_3}{\alpha}}$. **27)** On a $p = \alpha \rho_e(r, x_3)$ avec $\rho_e(r, x_3) = \rho_0 \exp \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - g x_3 \right) \right]$. **28)** Les isobares sont des cercles concentriques. Le minimum de pression est au centre.

EXAMEN 2002

L'examen 2002 était constitué des exercices ou problèmes "Relation de Gibbs", "Diffusion de la chaleur et mouvement" à partir de la question 11 incluse et "Matériau élastique encastré".

EXERCICE 9.32

 Relation de Gibbs

On considère un fluide parfait compressible et \underline{U} , p , e , ρ , T les champs eulériens caractérisant son mouvement et sa thermodynamique. On note $p = \mathcal{P}(\rho, e)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, T)$ ses lois d'état. On suppose que le flux de chaleur \underline{Q} est nul et qu'il n'y a pas de chauffage volumique ($r = 0$).

- 1) Quelle(s) loi(s) faut-il inverser pour obtenir l'expression $T = \mathcal{T}(\rho, e)$ de la température ?

2) On définit l'entropie $s = \mathcal{S}(\rho, e)$ du fluide par les relations

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial e}\right)_\rho(\rho, e) = \frac{1}{T(\rho, e)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho}\right)_e(\rho, e) = -\frac{\mathcal{P}(\rho, e)}{\rho^2 T(\rho, e)}. \quad (9.12)$$

Quelle relation thermodynamique traduisent ces égalités ?

- 3) Dédurre de la relation de Gibbs une relation entre les dérivées particulières $\frac{de}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\rho}{dt}$.
- 4) Écrire la loi de conservation de la masse et l'équation de bilan de l'énergie interne pour ce fluide parfait compressible.
- 5) Éliminer $\frac{de}{dt}$ et $\frac{d\rho}{dt}$ à partir des trois équations précédentes pour obtenir l'expression de $\frac{ds}{dt}$.
- 6) Commenter le résultat obtenu.

Corrigé page 67

PROBLÈME 9.33 Diffusion de la chaleur et mouvement

On considère un gaz parfait et on note $p = \rho \frac{R}{M} T$ et $e = C_v T$ ses lois d'état. On suppose que sa masse volumique $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est homogène en espace à $t = 0$ et qu'il est animé d'un mouvement fluide.

Mouvement 2D

On considère le mouvement défini par la représentation eulérienne de sa vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ telle que :

$$U_1 = \alpha x_1 \quad U_2 = \beta x_2 \quad \text{et} \quad U_3 = 0 \quad (9.13)$$

où α et β sont des constantes. On note $\chi = \alpha + \beta$ et on suppose que $\chi \geq 0$ et $\beta > 0$.

- 1) Exprimer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ et le tenseur des déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$.
- 2) On considère le domaine $\mathcal{D}(0) = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : a_1^2 + a_2^2 \leq l^2 \text{ et } 0 \leq a_3 \leq h\}$ et on note $\mathcal{D}(t)$ son évolution au cours du temps sous l'action du mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$. Exprimer le volume $V(t)$ du domaine $\mathcal{D}(t)$ en fonction du temps.
- 3) Tracer $V(t)$ en fonction du temps dans le cas $\alpha = \beta$ puis dans le cas $\chi = 0$.
- 4) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ dans un plan $x_3 = a_3$ dans le cas $\alpha = \beta$ puis dans le cas $\chi = 0$.
- 5) Donner l'expression de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ en supposant que $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$.
- 6) Tracer les trajectoires dans un plan $x_3 = a_3$ dans le cas $\alpha = \beta$ puis dans le cas $\chi = 0$.
- 7) On considère un champ $B(\underline{x}, t)$ tel que $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = 0$ et $B(\underline{x}, 0) = \frac{\gamma}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Calculer l'expression lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de ce champ.
- 8) En déduire son expression eulérienne $B(\underline{x}, t)$.

- 9) Calculer $\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } B$ et vérifier que $\frac{dB}{dt} = 0$.
- 10) Décrire le domaine $\mathcal{D}(t)$ et le dessiner à différents instants dans le cas $\alpha = \beta$ puis dans le cas $\chi = 0$.
- 11) On considère le domaine

$$\mathcal{D}_{\underline{b}}(0) = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \leq l^2 \text{ et } 0 \leq (a_3 - b_3) \leq h\}$$

où $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est un vecteur donné. et on note $\mathcal{D}_{\underline{b}}(t)$ son évolution au cours du temps. Décrire le domaine $\mathcal{D}_{\underline{b}}(t)$ à l'instant t et le dessiner à différents instants dans le cas $\alpha = \beta$ en distinguant les cas $\|\underline{b}\| < l$, $\|\underline{b}\| = l$ et $\|\underline{b}\| > l$. Procéder de même pour le cas $\chi = 0$.

Fluide parfait incompressible

On suppose que le gaz est animé d'un mouvement de fluide parfait incompressible décrit par le champ de vitesse \underline{U} étudié précédemment. On suppose que la densité des forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ est nulle.

- 12) Quelle relation doivent vérifier α et β ?
- 13) En supposant la pression $p(\underline{Q}, t) = p_0$ constante en $\underline{x} = \underline{Q}$ et pour tout temps t , calculer le champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
- 14) Calculer la résultante $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}[\mathcal{D}(t)]$ des forces de contact extérieures au domaine $\mathcal{D}(t)$ défini plus haut.
- 15) Estimer sans calcul la direction et le sens de $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}[\mathcal{D}_{\underline{b}}(t)]$ pour $\underline{b} = (b_1, 0, 0)$ avec $b_1 > 0$.

Fluide parfait compressible

On suppose que le gaz est animé d'un mouvement de fluide parfait compressible décrit par le champ de vitesse \underline{U} étudié précédemment avec $\alpha = \beta$. On chauffe ce fluide avec un apport volumique d'énergie interne $r(\underline{x}, t)$ et on suppose que les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ sont non nulles.

- 16) Donner l'expression de la masse volumique de ce gaz.
- 17) Calculer l'expression du champ $r(\underline{x}, t)$ permettant de garder un champ de température $T(\underline{x}, t) = T_0$ constant en temps et en espace. Interpréter le signe de r et son sens de variation avec t .
- 18) Calculer l'expression que doit avoir le champ $\underline{f}(\underline{x}, t)$ pour que le champ de vitesse \underline{U} soit solution des équations d'Euler.

Diffusion sans mouvement

On note k le coefficient de conductivité thermique du gaz et $\kappa = \frac{k}{\rho_0 C_v}$ le coefficient de diffusivité thermique. On considère le cas $\alpha = \beta = 0$ où le gaz est au repos ($\underline{U} = \underline{Q}$). On suppose $\underline{f} = 0$ et $r = 0$.

- 19) Écrire l'équation d'évolution de la température $T(\underline{x}, t)$ de ce gaz.

- 20) On suppose que $T(\underline{x}, t_0) = A_0 \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma_0^2}\right]$ est l'expression du champ de température à $t = t_0 > 0$. Montrer que le champ de température peut s'écrire $T(\underline{x}, t) = A(t) \exp\left[-\lambda(t) \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et donner les équations différentielles ordinaires que doivent alors vérifier les fonctions $A(t)$ et $\lambda(t)$.
- 21) On suppose que $\sigma_0 = \sqrt{2\kappa t_0}$. Calculer alors les fonctions $A(t)$ et $\lambda(t)$.
- 22) Montrer que le champ de température s'écrit alors sous la forme $T(\underline{x}, t) = A(t) \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2(t)}\right]$. Tracer $\sigma(t)$ et $A(t)$ en fonction du temps.
- 23) On considère le domaine infini $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq a_3 \leq l\}$. Tracer l'énergie interne $\mathcal{E}_{\text{int}}(\Omega_0)$ en fonction du temps et commenter la courbe.

Corrigé page 68

EXERCICE 9.34 Matériau élastique encastré

On considère un matériau élastique dont la configuration de référence est le parallélépipède $0 \leq a_1 \leq l_1$, $0 \leq a_2 \leq l_2$ et $0 \leq a_3 \leq l_3$.

On note ρ_0 la masse volumique du matériau dans la configuration de référence et on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène et isotrope. On note λ et μ les coefficients de Lamé du matériau.

On suppose que ce matériau est complètement encastré dans un matériau indéformable, ce qui signifie qu'il occupe toujours le même espace. On s'intéresse à l'état d'équilibre de ce matériau en présence de forces de gravité $\underline{f}(\underline{a}) = -\rho_0 g \underline{e}^{(3)}$.

- 1) Écrire les équations de Lamé-Clapeyron en projection sur les axes et préciser les conditions aux limites.
- 2) Montrer que l'on peut supposer $\xi_1 = \xi_2 = 0$ et que ξ_3 ne dépend que de a_3 .
- 3) En déduire le champ de vecteur déplacement $\underline{\xi}(\underline{a})$ à l'équilibre.
- 4) Tracer le déplacement vertical $\xi_3(a_3)$.
- 5) Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ en chaque point du matériau.
- 6) Calculer la résultante des forces de contact exercées par le matériau indéformable sur le matériau encastré sur chacune des faces horizontales.
- 7) Calculer la résultante des forces de contact exercées par le matériau indéformable sur le matériau encastré sur chacune des faces verticales.

Corrigé page 69

Corrigé Relation de Gibbs

1) Il faut inverser la loi d'état de l'énergie $e = \mathcal{E}(\rho, T)$. 2) Il s'agit de la relation de Gibbs que l'on peut écrire sous la forme $de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ ou $T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho$. 3) On en déduit $\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$. 4) La loi de conservation de la masse est $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$. L'équation de bilan de l'énergie interne est

$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$. **5)** En éliminant $\frac{de}{dt}$ et $\frac{dp}{dt}$, on obtient $\frac{ds}{dt} = 0$. **6)** Pour un fluide parfait, la viscosité est négligée. Comme de plus les apports de chaleur sont nuls, il est normal que l'entropie reste constante le long des trajectoires des particules fluides. En effet, les transformations sont réversibles.

Corrigé

 Diffusion de la chaleur et mouvement

Mouvement 2D

1) On a $\underline{\omega} = \underline{0}$, $D_{11} = \alpha$, $D_{22} = \beta$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **2)** On a $\operatorname{div} \underline{U} = \chi$. Comme $V(t) = \iint_{\mathcal{D}} d^3x$, on a $\dot{V}(t) = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{U} d^3x = \chi V(t)$. On en déduit $V(t) = V(0)e^{\chi t}$ avec $V(0) = \pi l^2 h$. **3)** Dans le cas $\alpha = \beta = \chi/2$, la fonction $V(t)$ croît exponentiellement puisque $\chi > 0$. Dans le cas $\chi = 0$, la fonction $V(t)$ est constante. **4)** Les lignes de champs sont les droites $a_1 x_2 = a_2 x_1$ passant par $(x_1, x_2) = (0, 0)$ dans le cas $\alpha = \beta = \chi/2$ et les hyperboles $x_1 x_2 = a_1 a_2$ d'asymptotes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ dans le cas $\chi = 0$. **5)** La déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ s'écrit $x_1 = a_1 e^{\alpha t}$, $x_2 = a_2 e^{\beta t}$ et $x_3 = a_3$. **6)** Les trajectoires sont confondues avec les lignes de champs car le mouvement est stationnaire. **7)** Comme $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ est équivalent à $\frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, 0) = 0$, on a $B^{(L)}(\underline{a}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, 0) = \frac{\gamma}{2}(a_1^2 + a_2^2)$. **8)** On utilise $B(\underline{x}, t) = B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), 0]$. La déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ s'écrivant $a_1 = x_1 e^{-\alpha t}$, $a_2 = x_2 e^{-\beta t}$ et $a_3 = x_3$, on a donc $B(\underline{x}, t) = \frac{\gamma}{2}(x_1^2 e^{-2\alpha t} + x_2^2 e^{-2\beta t})$. **9)** On a $\frac{\partial B}{\partial t} = -\gamma(\alpha x_1^2 e^{-2\alpha t} + \beta x_2^2 e^{-2\beta t})$ et $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} B = \gamma(U_1 x_1 e^{-2\alpha t} + U_2 x_2 e^{-2\beta t})$. On a bien $\frac{\partial B}{\partial t} = -\underline{U} \cdot \operatorname{grad} B$ et donc $\frac{dB}{dt} = 0$. **10)** En utilisant l'expression de la déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$, on peut écrire

$$\mathcal{D}(t) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \left[\frac{x_1}{l \exp(\alpha t)} \right]^2 + \left[\frac{x_2}{l \exp(\beta t)} \right]^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq h \right\}.$$

Le domaine $\mathcal{D}(t)$ est donc un cylindre de section elliptique dont les axes principaux sont $l e^{\alpha t}$ dans la direction x_1 et $l e^{\beta t}$ dans la direction x_2 . Pour $\alpha = \beta = \chi/2 \geq 0$, le domaine $\mathcal{D}(t)$ est un cylindre de section circulaire dont le rayon croît exponentiellement. Pour $\chi = 0$, la section est une ellipse de plus en plus allongée dans la direction x_2 . **11)** On peut écrire $\mathcal{D}_{\underline{b}}(t) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \left[\frac{x_1 - b_1 \exp(\alpha t)}{l \exp(\alpha t)} \right]^2 + \left[\frac{x_2 - b_2 \exp(\beta t)}{l \exp(\beta t)} \right]^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq h \right\}$. Ce domaine a la même forme que $\mathcal{D}(t)$ mais son centre suit le mouvement de la trajectoire issue de \underline{b} à $t = 0$.

Fluide parfait incompressible

12) Comme le fluide est incompressible, on doit avoir $\chi = 0$ et donc $\alpha + \beta = 0$. **13)** Comme $\frac{d\underline{U}}{dt} = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2, 0)$, $\underline{f} = \underline{0}$ et $\Delta \underline{U} = \underline{0}$, la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit $\rho_0 \alpha^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$, $\rho_0 \alpha^2 x_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$ ce qui entraîne $p(\underline{x}, t) = p_0 - \rho_0 \alpha^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$. **14)** On peut écrire $\mathcal{F}_{\text{cont}}[\mathcal{D}(t)] = -\iint_{\partial \mathcal{D}} p(\underline{x}, t) \underline{n} d^3x$. En remarquant que la pression et la

forme de l'ensemble sont symétriques par rapport à l'origine $(x_1, x_2) = (0, 0)$, on peut écrire sans calcul que $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}[\mathcal{D}(t)] = \underline{0}$. **15)** Comme l'ensemble $\mathcal{D}'(t)$ est symétrique par rapport à l'axe Ox_1 et que p décroît avec la distance à l'origine, on voit que $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}[\mathcal{D}'(t)]$ est dans la direction de l'axe Ox_1 et dirigé vers les x_1 croissants.

Fluide parfait compressible

16) Comme $\text{div } \underline{U} = \chi$, on a $\rho = \rho_0 \exp(-\chi t)$. **17)** L'équation de bilan de l'énergie s'écrit $\rho \frac{de}{dt} = r + k \Delta T - p \text{div } \underline{U}$. En utilisant la loi d'état $p = \rho \frac{R}{M} T$, on voit que $e = C_v T$ est constant si et seulement si $r(\underline{x}, t) = \rho_0 \frac{R}{M} T_0 \chi e^{-\chi t} = \rho_0 \chi e^{-\chi t}$. Le terme de chauffage volumique nécessaire pour maintenir la température constante est positif (c'est une détente) et décroît avec le temps (la densité diminue avec un taux de détente constant). **18)** Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $\rho \alpha^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1$, $\rho \alpha^2 x_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + f_2$ et $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + f_3$. Comme $\rho = \rho_0 e^{-\chi t}$ et $p = \rho_0 e^{-\chi t} \frac{R}{M} T_0$, on doit avoir $f_1 = \rho \alpha^2 x_1$, $f_2 = \rho \alpha^2 x_2$ et $f_3 = 0$.

Diffusion sans mouvement

19) L'équation de bilan de l'énergie interne conduit à $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$. **20)** On a $\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{dA}{dt} - A \frac{d\lambda}{dt} \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) E$, $\frac{\partial T}{\partial x_1} = A(-\lambda x_1) E$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = A(-\lambda + \lambda^2 x_1^2) E$, etc. avec $E = \exp \left[-\lambda(t) \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right]$. En reportant dans les équations, on voit que l'on doit avoir $\frac{dA}{dt} = -2\kappa\lambda A$ et $\frac{d\lambda}{dt} = -2\kappa\lambda^2$. **21)** On en déduit que $\frac{1}{\lambda(t)} = 2\kappa(t - t_0) + \frac{1}{\lambda_0} = 2\kappa(t - t_0) + 2\kappa t_0 = 2\kappa t$. D'où $\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{t} A$ and $A = A_0 \frac{t_0}{t}$. **22)** On a donc $\sigma(t) = \sqrt{2\kappa t}$: l'écart-type du champ de température varie en \sqrt{t} (résultat classique de la diffusion). L'amplitude A décroît comme l'inverse du temps. **23)** On a $\mathcal{E}_{\text{int}}(\Omega_0) = \iiint_{\Omega_0} \rho_0 C_v T d^3x = \rho_0 C_v A \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta = 2\pi \rho_0 C_v A(t) \sigma^2(t) = 2\pi \rho_0 \kappa C_v A_0 t_0 \sigma_0^2$. Cette fonction ne dépend pas du temps (l'énergie interne est conservé dans ce cas).

Corrigé

 Matériau élastique encastré

1) Les équations de Lamé-Clapeyron s'écrivent $0 = f_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial a_1} \text{div } \underline{\xi} + \mu \Delta \xi_1$, $0 = f_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial a_2} \text{div } \underline{\xi} + \mu \Delta \xi_2$ et $0 = f_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial a_3} \text{div } \underline{\xi} + \mu \Delta \xi_3$. Les conditions aux limites s'écrivent $\underline{\xi}(\underline{a}) = \underline{0}$ sur chacune des faces. **2)** On cherche des solutions vérifiant $\xi_1(\underline{a}) = \xi_2(\underline{a}) = 0$, en accord avec les conditions aux limites. On cherche des solutions sous la forme $\xi_3(\underline{a}) = \xi_3(a_3)$. On doit donc résoudre $(\lambda + 2\mu)\xi_3''(a_3) = \rho_0 g$ qui admet une solution. Comme la solution d'une équation linéaire est unique, c'est donc la bonne. **3)** En appliquant les conditions aux limites $\xi_3(0) = \xi_3(l_3) = 0$, on obtient $\xi_3(a_3) = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 g}{\lambda + 2\mu} a_3 (a_3 - l_3)$. **4)** Le déplacement $\xi_3(a_3)$ est une parabole qui s'annule en $a_3 = 0$ et $a_3 = l_3$. Le déplacement est négatif. **5)** La loi de Hooke entraîne $\sigma_{33} = \rho_0 g (a_3 - l_3/2)$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{33}$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. **6)** La force

exercée par le support du bas sur le matériau est égale à la moitié du poids $P = \rho_0 g l_1 l_2 l_3$ et est orientée vers le haut. L'autre moitié du poids est compensée par la paroi du haut. 7) Les forces exercées par les parois latérales sont nulles.

EXAMEN 2001

Seules les questions suivantes doivent être rédigées :

6), 8), 11), de 12) à 20) incluses, 25, 26), 29) et de 31) à 40) incluses. La réponse aux autres questions, déjà traitées lors du partiel, peuvent permettre de poursuivre le problème.

PROBLÈME 9.35

 Ondes de compression

Premier mouvement

On considère un premier mouvement $\tilde{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$x_1 = a_1 - l \sin[k(a_1 - ct)], \quad x_2 = a_2 \quad \text{et} \quad x_3 = a_3 \quad (9.14)$$

où $l > 0$, $k > 0$ et $c > 0$ sont des constantes. On suppose que $\eta = kl < 1$.

- 1) Quelles sont les dimensions de l , k , c et η ?
- 2) Calculer la représentation lagrangienne $\tilde{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ de ce mouvement.
- 3) Calculer le Jacobien $\tilde{J}(\underline{a}, t)$ de ce mouvement.
- 4) En déduire que la configuration de référence Ω_0 ne correspond à aucune des configurations $\Omega(t)$ atteintes lors de ce mouvement.
- 5) On suppose que la représentation lagrangienne $\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la masse volumique s'écrit

$$\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\rho_0}{1 - \eta \cos[k(a_1 - ct)]}. \quad (9.15)$$

Montrer que la masse est bien conservée au cours du temps.

- 6) Quelle est la masse volumique dans la configuration de référence Ω_0 ?
- 7) On note \tilde{G}_η la fonction définie sur \mathbb{R} par $\tilde{G}_\eta(\theta) = \theta - \eta \sin \theta$. Tracer (schématiquement) cette fonction et montrer qu'elle est inversible.
- 8) On note \tilde{H}_η la fonction inverse de \tilde{G}_η , c'est-à-dire telle que $\varphi = \tilde{G}_\eta(\theta) \iff \theta = \tilde{H}_\eta(\varphi)$. Indiquer le domaine de définition de \tilde{H}_η et tracer (schématiquement) cette fonction.
- 9) On considère le champ scalaire B dont la représentation eulérienne est $B^{(E)}(\underline{x}, t) = k(x_1 - ct)$. Exprimer sa représentation lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$, pour le mouvement \tilde{X} , à l'aide de la fonction \tilde{G}_η .
- 10) On considère le champ scalaire C dont la représentation lagrangienne est $C^{(L)}(\underline{a}, t) = k(a_1 - ct)$. En utilisant les résultats des questions précédentes, exprimer sa représentation eulérienne $C^{(E)}(\underline{x}, t)$, pour le mouvement \tilde{X} , à l'aide de la fonction \tilde{H}_η .

- 11) En déduire la représentation eulérienne $\tilde{\underline{U}}^{(E)}(\underline{x}, t)$ de la vitesse ainsi que la représentation eulérienne $\tilde{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t)$ de la masse volumique à l'aide de la fonction \tilde{H}_η .

Ondes élastiques longitudinales

On considère un solide élastique homogène et isotrope caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ . On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire. En l'absence de contraintes, ce solide occupe une configuration de référence Ω_0 et sa masse volumique est ρ_0 . On suppose ensuite que le solide est animé d'un mouvement de vibration modélisé par le premier mouvement $\tilde{\underline{X}}(\underline{a}, t) = \underline{a} - l \sin[k(a_1 - ct)] \underline{e}^{(1)}$. On négligera les forces de gravité.

- 12) Calculer le déplacement $\tilde{\underline{\xi}}(\underline{a}, t)$ associé à ce mouvement.
 13) Calcul le tenseur des petites déformations $\tilde{\underline{\epsilon}}(\underline{a}, t)$.
 14) Montrer que ce mouvement est solution des équations de Lamé si et seulement si c^2 est relié à λ , μ et ρ_0 par une relation que l'on précisera.
 15) Que représente physiquement la quantité c ?

On suppose maintenant que $\eta \ll 1$ est très petit. On cherche alors à pousser les développements asymptotiques des différents champs jusqu'au premier ou au deuxième ordre en η suivant les cas.

- 16) Que traduit l'hypothèse $\eta \ll 1$?
 17) On note $\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t)$ la représentation lagrangienne de la masse volumique du solide au cours de la vibration. Montrer que l'on peut écrire :

$$\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 + \eta \rho_0 \cos[k(a_1 - ct)] + O(\eta^2). \quad (9.16)$$

- 18) Montrer que l'on peut écrire $\tilde{G}_\eta(\theta) = \theta + O(\eta)$ et $\tilde{H}_\eta(\varphi) = \varphi + O(\eta)$.
 19) En déduire les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1^{(E)}(\underline{x}, t) &= \eta c \cos[k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ \tilde{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t) &= \rho_0 + \eta \rho_0 \cos[k(x_1 - ct)] + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (9.17)$$

- 20) Comparer les représentations lagrangiennes et eulériennes des champs de masse volumique et de vitesse à l'ordre dominant en η . Expliquer ce résultat dans le cadre des hypothèses de base de l'élasticité linéaire.

Second mouvement

On considère un second mouvement défini par la représentation eulérienne $\hat{\underline{U}}^{(E)}(\underline{x}, t)$ de son champ de vitesse qui s'écrit

$$\hat{U}_1^{(E)} = v \cos[k(x_1 - ct)], \quad \hat{U}_2^{(E)} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{U}_3^{(E)} = 0 \quad (9.18)$$

où $v > 0$, $k > 0$ et $c > 0$ sont des constantes. On suppose que $\eta = v/c < 1$. Dans un premier temps, η n'est pas petit.

- 21) Quelles sont les dimensions de v , k , c et η ?
 22) Calculer le tenseur des taux de déformations $\underline{\hat{D}}(\underline{x}, t)$ et le vecteur rotation $\underline{\hat{\omega}}(\underline{x}, t)$.
 23) Quel est le taux de dilatation des volumes au point \underline{x} et à l'instant t ?
 24) Montrer que la représentation eulérienne $\hat{\rho}^{(E)}$ de la masse volumique définie par

$$\hat{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t) = \frac{\rho_0}{1 - \eta \cos [k(x_1 - ct)]} \quad (9.19)$$

est solution de l'équation de conservation de la masse.

- 25) On note \hat{H}_η la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\hat{H}_\eta(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{1 - \eta \cos \alpha} d\alpha. \quad (9.20)$$

Tracer (schématiquement) cette fonction et montrer qu'elle est inversible.

Le calcul de l'intégrale, qui conduit à $\hat{H}_\eta(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{Int} \left(\frac{\varphi}{2\pi} \right)$, où Int est la partie entière, n'est pas indispensable pour répondre à cette question (on pourra tracer d'abord sa dérivée ou montrer que $\frac{\eta}{1+\eta} \sin \varphi \leq H(\varphi) - \varphi \leq \frac{\eta}{1-\eta} \sin \varphi$).

- 26) On note \hat{G}_η la fonction inverse de \hat{H}_η , c'est-à-dire telle que $\theta = \hat{H}_\eta(\varphi) \iff \varphi = \hat{G}_\eta(\theta)$. Indiquer le domaine de définition de \hat{G}_η et tracer (schématiquement) cette fonction.
 27) On considère la trajectoire $\underline{x}(t)$ qui vérifie $\hat{H}_\eta[k x_1(0)] = k a_1$, $x_2(0) = a_2$ et $x_3(0) = a_3$ et on construit la fonction $\varphi(t) = k [x_1(t) - ct]$ à partir de sa première coordonnée. Montrer que l'on peut exprimer simplement $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction de φ .
 28) En déduire que $\varphi(t)$ s'exprime en fonction de a_1 et de t à l'aide de la fonction \hat{G}_η .
 29) En déduire une formulation lagrangienne $\hat{\underline{X}}(\underline{a}, t)$ du mouvement définie par une configuration de référence Ω_0 qui ne correspond pas forcément à la configurations $\Omega(0)$ atteintes par le mouvement pour $t = 0$.
 30) Comparer l'expression de la vitesse $\tilde{\underline{U}}^{(L)}(\underline{a}, t)$ du premier mouvement avec celle de la vitesse $\hat{\underline{U}}^{(E)}(\underline{x}, t)$ du second mouvement. Les expressions de $\tilde{\underline{U}}^{(E)}(\underline{x}, t)$ et $\hat{\underline{U}}^{(L)}(\underline{a}, t)$ sont-elles pour autant égales ?

On suppose maintenant que $\eta \ll 1$ est très petit.

- 31) Montrer que l'on peut alors écrire :

$$\hat{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t) = \rho_0 + \eta \rho_0 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2). \quad (9.21)$$

- 32) Montrer que l'on peut écrire $\hat{H}_\eta(\varphi) = \varphi + O(\eta)$ et $\hat{G}_\eta(\theta) = \theta + O(\eta)$.

- 33) En déduire les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{U}}_1^{(L)}(\underline{a}, t) &= \eta c \cos [k(a_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ \hat{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t) &= \rho_0 + \eta \rho_0 \cos [k(a_1 - ct)] + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (9.22)$$

- 34) Comparer maintenant les expressions de $\widehat{\underline{U}}^{(L)}(\underline{a}, t)$, $\widehat{\underline{U}}^{(E)}(\underline{x}, t)$, $\widetilde{\underline{U}}^{(L)}(\underline{a}, t)$ et $\widetilde{\underline{U}}^{(E)}(\underline{x}, t)$ à l'ordre dominant en η . Que peut-on dire des deux mouvements et de leur représentations lagrangienne et eulérienne ?

Ondes sonores

On considère un fluide parfait, compressible, non conducteur de la chaleur, dans un milieu infini en l'absence de forces ou de chauffage extérieur. On suppose que ses lois d'état sont celles d'un gaz parfait $e = C_v T$ et $p = \rho r T$ où C_v et r sont des constantes. On suppose connue la représentation eulérienne des champs de vitesse \underline{U} , de masse volumique ρ , de pression p et de température T à l'ordre dominant d'un petit paramètre $\eta \ll 1$:

$$\begin{aligned}\underline{U}(\underline{x}, t) &= \eta c \cos [k(x_1 - ct)] \underline{e}^{(1)} + O(\eta^2) \\ \rho(\underline{x}, t) &= \rho_0 + \eta \rho_0 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ p(\underline{x}, t) &= p_0 + \eta \rho_0 c^2 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2) \\ T(\underline{x}, t) &= T_0 + \eta (r/C_v) T_0 \cos [k(x_1 - ct)] + O(\eta^2)\end{aligned}\quad (9.23)$$

où $\underline{e}^{(1)}$ est un vecteur unitaire de la base canonique et où k , p_0 et ρ_0 sont des constantes données, $T_0 = \frac{p_0}{r \rho_0}$ s'en déduit et c est une vitesse que l'on veut déterminer pour que ces champs soient solutions des équations d'Euler. On négligera les forces de gravité.

- 35) Montrer que la loi de conservation de la masse est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).
 36) Montrer que la loi de conservation de la quantité de mouvement est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).
 37) Montrer que l'équation de bilan de l'énergie interne est vérifiée à l'ordre dominant en η (ordre un).
 38) En exprimant l'équation d'état du gaz parfait à l'ordre un en η , montrer que $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et $C_p = C_v + r$.
 39) Commenter le nom de "vitesse du son" attribué à la vitesse c .
 40) En rappelant l'égalité des premier ($\widetilde{\underline{X}}$) et second mouvement ($\widehat{\underline{U}}^{(E)}$) à l'ordre dominant en η , décrire les trajectoires $\underline{x}(t)$ associées aux ondes sonores.

Corrigé page 73

Corrigé Ondes de compression

Premier mouvement

1) Les unités sont m pour la longueur l , m^{-1} pour le nombre d'onde k et $m s^{-1}$ pour la vitesse c . La constante η est un nombre sans dimension. 2) En dérivant par rapport au temps, on obtient $\widetilde{U}_1^{(L)} = k l c \cos [k(a_1 - ct)]$ avec $k l c = \eta c$, $\widetilde{U}_2^{(L)} = 0$ et $\widetilde{U}_3^{(L)} = 0$. 3) Le Jacobien s'écrit $\widetilde{J}(\underline{a}, t) = 1 - k l \cos [k(a_1 - ct)] > 0$ avec $k l = \eta$. 4) Si Ω_0 coïncidait avec la configuration $\Omega(t_*)$ au temps

t_* on aurait $\tilde{J}(\underline{a}, t_*) = 1$ pour tout \underline{a} . L'expression du Jacobien montre que c'est impossible car $\eta > 0$. **5)** On voit que $\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t) \tilde{J}(\underline{a}, t) = \rho_0$ est indépendant du temps. La masse est donc conservée au cours du mouvement. **6)** La densité de masse dans la configuration référence Ω_0 est ρ_0 . Elle est uniforme. **7)** La dérivée de la fonction \tilde{G}_η est $\tilde{G}'_\eta(\theta) = 1 - \eta \cos \theta$. Cette dérivée est strictement positive dans la mesure où $\eta < 1$. La fonction est donc strictement croissante. Son graphe est compris entre les droites $\theta - \eta$ et $\theta + \eta$. Comme son image est \mathbb{R} , elle est inversible. **8)** Le domaine de définition de \tilde{H}_η est \mathbb{R} . Le tracé de cette fonction s'obtient par symétrie par rapport au tracé de son inverse en changeant les axes θ et φ . **9)** En remplaçant $x_1 = a_1 - l \sin[k(a_1 - ct)]$ dans l'expression de $B^{(E)}(\underline{x}, t) = k(x_1 - ct)$ on obtient $B^{(L)}(\underline{a}, t) = k(a_1 - ct) - kl \sin[k(a_1 - ct)] = \tilde{G}_\eta[k(a_1 - ct)]$ avec $\eta = kl$. **10)** En inversant cette expression, on voit que la représentation eulérienne de $C^{(L)}(\underline{a}, t) = k(a_1 - ct)$ est $C^{(E)}(\underline{x}, t) = \tilde{H}_\eta[k(x_1 - ct)]$. **11)** On a donc $\tilde{U}_1^{(E)}(\underline{x}, t) = \eta c \cos\{\tilde{H}_\eta[k(x_1 - ct)]\}$, $\tilde{U}_2^{(E)}(\underline{x}, t) = 0$ et $\tilde{U}_3^{(E)}(\underline{x}, t) = 0$. On déduit de même que $\tilde{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t) = \rho_0 / \left(1 - \eta \cos\{\tilde{H}_\eta[k(x_1 - ct)]\}\right)$.

Ondes élastiques longitudinales

12) Le déplacement est $\tilde{\xi}(\underline{a}, t) = -l \sin[k(a_1 - ct)] \underline{e}^{(1)}$. **13)** Le tenseur $\tilde{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{a}, t)$ vérifie $\tilde{\epsilon}_{11} = -\eta \cos[k(a_1 - ct)]$, $\tilde{\epsilon}_{ij} = 0$ sinon. **14)** En reportant l'expression de $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$ dans l'équation de Lamé, on obtient $\rho_0 c^2 = \lambda + 2\mu$. **15)** La quantité $c = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$ est la vitesse des ondes de vibration longitudinale du solide. **16)** Cette hypothèse s'inscrit dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'hypothèse $\eta \ll 1$ entraîne l'hypothèse des petites déformations ($\tilde{\underline{\underline{\epsilon}}}$ petit devant 1) et des petits déplacements en choisissant k^{-1} comme échelle de longueur caractéristique. **17)** La loi de conservation de la masse entraîne $\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0 / \{1 - \eta \cos[k(a_1 - ct)]\}$. Le développement asymptotique de $\tilde{\rho}^{(L)}(\underline{a}, t)$ en découle trivialement. **18)** La définition de \tilde{G}_η entraîne que cette fonction est égale à l'identité à l'ordre zéro en η . Il en est donc de même pour son inverse \tilde{H}_η . **19)** L'expression $\tilde{U}_1^{(E)}(\underline{x}, t) = \eta c \cos\{\tilde{H}_\eta[k(x_1 - ct)]\}$ et la relation $\tilde{H}_\eta(\varphi) = \varphi + O(\eta)$ permettent d'obtenir le développement asymptotique de ce champ. Le même raisonnement s'applique pour le champ $\tilde{\rho}^{(E)}$. **20)** Les représentations eulériennes et lagrangienne des champs de masse volumique et de vitesse sont égales à l'ordre un en η . L'hypothèse $\eta = kl \ll 1$ signifie que le déplacement l est petit devant l'échelle de variation k^{-1} des champs de vitesse et de densité. Cette hypothèse de petits déplacements (champs peu déformés) entraîne l'égalité des représentations eulériennes et lagrangienne à l'ordre dominant.

Second mouvement

21) Les unités sont m^{-1} pour le nombre d'onde k , $m s^{-1}$ pour les vitesses v et c . La constante η est un nombre sans dimension. **22)** Seule la composante $\hat{D}_{11} = -k v \sin[k(x_1 - ct)]$ du tenseur des taux de déformations

$\widehat{D}(\underline{x}, t)$ est non nulle. Le vecteur rotation $\widehat{\omega}(\underline{x}, t)$ est nul. **23)** Le taux de dilation d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ pris autour d'un point \underline{x} à l'instant t est $\frac{1}{\delta\mathcal{V}} \frac{d}{dt}(\delta\mathcal{V}) = \text{div } \widehat{U}(\underline{x}, t) = \widehat{D}_{11}(\underline{x}, t)$. **24)** Pour vérifier que $\widehat{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t)$ est solution de l'équation de conservation de la masse $\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\widehat{\rho} \widehat{U}) = 0$ il suffit de vérifier ici que $\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\widehat{U}_1 \widehat{\rho}) = 0$. On calcule alors les expressions suivantes : $\frac{\partial}{\partial t} \widehat{\rho} = \frac{\eta k c \widehat{\rho}_0 \sin \varphi}{(1-\eta \cos \varphi)^2}$ et $\frac{\partial}{\partial x_1}(\widehat{U}_1 \widehat{\rho}) = \frac{-k v \rho_0 \sin \varphi}{(1-\eta \cos \varphi)^2}$ avec $\varphi = k(x_1 - ct)$. Comme $c = \eta v$, on voit alors que l'équation de conservation de la masse est satisfaite. **25)** La dérivée de la fonction \widehat{H} est $\widehat{H}'(\varphi) = \frac{1}{1-\eta \cos \varphi}$. Cette dérivée est strictement positive dans la mesure où $\eta < 1$. La fonction est donc strictement croissante. On montre facilement que $\frac{\eta}{1+\eta} \int_0^\varphi \cos \alpha \, d\alpha \leq \eta \int_0^\varphi \frac{\cos \alpha}{1-\eta \cos \alpha} \, d\alpha \leq \frac{\eta}{1-\eta} \int_0^\varphi \cos \alpha \, d\alpha$. On en déduit que $\frac{\eta}{1+\eta} \sin \varphi \leq H(\varphi) - \varphi \leq \frac{\eta}{1-\eta} \sin \varphi$. Cet encadrement permet le tracé schématique de la fonction H . Comme son image est \mathbb{R} , elle est inversible. **26)** Le domaine de définition de \widehat{G}_η est \mathbb{R} . Le tracé de cette fonction s'obtient par symétrie par rapport au tracé de son inverse en changeant les axes θ et φ . **27)** Une trajectoire $\underline{x}(t)$ est solution du système d'équations différentielles ordinaires $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \widehat{U}^{(E)}[\underline{x}(t), t]$ qui s'écrit ici $\frac{d}{dt} x_1 = \eta c \cos[k(x_1 - ct)]$, $\frac{d}{dt} x_2 = 0$ et $\frac{d}{dt} x_3 = 0$. En notant $\varphi(t) = k[x_1(t) - ct]$, on peut écrire la première équation sous la forme $\frac{d}{dt} \varphi = k \eta c \cos \varphi - k c$. **28)** On en déduit $\frac{d\varphi}{1-\eta \cos \varphi} = -k c dt$ qui s'intègre en $\widehat{H}_\eta[\varphi(t)] = k(a_1 - ct)$. La constante d'intégration $k a_1$ a été déterminée en utilisant la condition initiale $\widehat{H}_\eta[k x_1(0)] = k a_1$. **29)** En considérant la fonction inverse \widehat{G}_η de \widehat{H}_η , on peut donc écrire $\varphi(t) = k[x_1(t) - ct] = \widehat{G}_\eta(k a_1 - ct)$ ce qui entraîne $x_1(t) = \frac{1}{k} \widehat{G}_\eta(k a_1 - ct) + ct$. Les autres composantes sont trivialement $x_2(t) = a_2$ et $x_3(t) = a_3$. On en déduit la formulation lagrangienne $\widehat{X}(\underline{a}, t)$ qui s'écrit $x_1 = \frac{1}{k} \widehat{G}_\eta(k a_1 - ct) + ct$, $x_2 = a_2$ et $x_3 = a_3$. **30)** On a $\widehat{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \eta c \cos[k(a_1 - ct)] \underline{e}^{(1)}$ et $\widehat{U}^{(E)}(\underline{x}, t) = \eta c \cos[k(x_1 - ct)] \underline{e}^{(1)}$. Ce sont les mêmes fonctions appliquées à des variables différentes. Les expressions $\widehat{U}^{(E)}(\underline{x}, t) = \eta c \cos\{\widehat{H}_\eta[k(x_1 - ct)]\} \underline{e}^{(1)}$, et $\widehat{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \eta c \cos\{\widehat{G}_\eta[k(a_1 - ct)]\} \underline{e}^{(1)}$ ne sont pas identiques car $\widehat{H}_\eta \neq \widehat{G}_\eta$ ce qui revient à dire $\widehat{G}_\eta \neq \widehat{H}_\eta$, ce qui découle de leurs définitions. **31)** Le développement asymptotique de $\widehat{\rho}^{(E)}(\underline{x}, t)$ s'obtient trivialement à partir de sa définition. **32)** On peut écrire $\widehat{H}_\eta = \int_0^\varphi [1 + O(\eta)] \, d\alpha = \varphi + O(\eta)$. Cette fonction est égale à l'identité à l'ordre zéro en η . Il en est donc de même pour son inverse \widehat{G}_η . **33)** L'expression $\widehat{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \widehat{U}^{(E)}[\widehat{X}(\underline{a}, t)]$ conduit à l'expression $\widehat{U}_1^{(L)}(\underline{a}, t) = \eta c \cos\{\widehat{G}_\eta[k(a_1 - ct)]\}$. La relation $\widehat{H}_\eta(\varphi) = \varphi + O(\eta)$ permet d'obtenir le développement asymptotique de ce champ. Le même raisonnement s'applique pour la densité. **34)** Les expressions de ces quatre vitesses sont identiques à l'ordre dominant en η . On peut donc confondre les représentations eulériennes et lagrangiennes des ces deux mouvements, ainsi que les deux mouvements eux-mêmes.

Ondes sonores

35) La loi de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = 0$ s'écrit ici $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1) = \frac{\partial}{\partial t}(\eta \rho_0 \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho_0 \eta c \cos \varphi) + O(\eta^2)$ avec $\varphi = k(x_1 - ct)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, l'équation de conservation de la masse est satisfaite à l'ordre η . **36)** Seule la première composante $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} U_1 + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} U_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_1} p$ de l'équation de la quantité de mouvement $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad} \underline{U} \right) = -\text{grad} p$ nécessite une vérification non triviale. Elle s'écrit $\eta \rho_0 c \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi = -\eta \rho_0 c^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + O(\eta^2)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$, l'équation de conservation de la conservation de mouvement est satisfaite à l'ordre η . **37)** L'équation de bilan de l'énergie interne $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} e + \underline{U} \cdot \text{grad} e \right) = -p \text{div} \underline{U}$, avec $e = C_v T$, s'écrit ici $\eta \rho_0 r T_0 \frac{\partial}{\partial t} \cos \varphi = -\eta p_0 c \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \varphi + O(\eta^2)$. Comme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$ et $\rho_0 r T_0 = p_0$, l'équation de bilan de l'énergie interne est satisfaite à l'ordre η . **38)** L'équation d'état $p = \rho r T$ s'écrit $p_0 + \eta \rho_0 c^2 \cos \varphi = \rho_0 r T_0 + \eta r (\rho_0 T_0 + \rho_0 T_0 r / C_v) \cos \varphi + O(\eta^2)$. L'ordre dominant est satisfait par définition de T_0 . L'ordre un en η conduit à $\rho_0 c^2 = \rho_0 T_0 r (1 + r / C_v)$ c'est-à-dire $c^2 = r T_0 \frac{C_v + r}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} r T_0 = \gamma r T_0$. On obtient donc bien $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et $C_p = C_v + r$. **39)** La vitesse c est la vitesse de propagation d'une onde progressive longitudinale qui correspond à des oscillations des champs dont le champ de pression. On peut montrer que l'entropie $s = s_0$ reste constante au cours de ces oscillations et que l'on a en fait $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s(\rho_0, s_0)$ où $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ est la loi d'état des gaz parfaits. **40)** Les premier et second mouvements sont identiques à l'ordre dominant en η . Les trajectoires associées aux ondes sonores sont donc décrites par le "premier mouvement" lorsque $\eta \ll 1$. Elles sont situées sur des segments de droites et s'écrivent $\underline{x}(t) = \underline{a} - l \sin[k(a_1 - ct)] \underline{e}^{(1)}$ où \underline{a} est la position moyenne de la particule.

EXAMEN 2000

Seules les questions **11 à 15** (incluses), la question **18** et **21 à 42** (incluses) sont à rédiger. Il n'est pas demandé de rédiger les questions 1 à 10 et 19 à 20 déjà traitées lors du partiel.

PROBLÈME 9.36

 Mouvement d'une demi-sphère

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse est définie par les relations

$$U_1 = \alpha x_1, \quad U_2 = \alpha x_2 \quad \text{et} \quad U_3 = -\beta x_3. \quad (9.24)$$

On suppose que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et on note $\chi = 2\alpha - \beta$. On considère que le milieu continu est compris dans le domaine $\Omega(t)$ qui, à $t = 0$, est égal à la demi-sphère $\Omega(0) = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a_3 \geq 0 \text{ et } \|\underline{a}\| \leq l\}$.

Cinématique

- 1) Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ et le tenseur des taux de déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$ de ce mouvement.
- 2) On considère les petits vecteurs transportés par le mouvement $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ tels que $\underline{\delta x}(0) = \delta b \left(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)} \right)$ et $\underline{\delta x}'(0) = \delta b \left(\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(3)} \right)$. Montrer que leur évolution ne dépend pas de la trajectoire dans le voisinage de laquelle ils sont choisis.
- 3) Calculer les dérivées $\frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}\|(0)$ et $\frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}'\|(0)$ des normes de ces petits vecteurs au temps $t = 0$.
- 4) On note $\theta(t)$ l'angle $(\underline{\delta x}, \underline{\delta x}')$ de ces deux petits vecteurs. Calculer la dérivée $\frac{d}{dt} \theta(0)$ de cet angle à $t = 0$.
- 5) On note $\mathcal{V}(t)$ le volume du domaine $\Omega(t)$. Calculer $\text{div } \underline{U}$ pour en déduire $[1/\mathcal{V}(t)] \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t)$.
- 6) Donner l'expression de $\mathcal{V}(0)$ en fonction de l . En déduire $\mathcal{V}(t)$ pour tout temps.
- 7) On suppose que la masse est conservée et qu'à $t = 0$ la densité ρ_0 est uniforme. Montrer que l'équation de conservation de la masse en représentation eulérienne entraîne que la densité $\rho(\underline{x}, t)$ reste uniforme en espace. En déduire l'expression de ce champ de densité ρ en fonction du temps.
- 8) On définit le champ scalaire B à l'aide de sa représentation eulérienne $B(\underline{x}, t) = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta}{2}x_3^2$. Calculer $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t)$.
- 9) Calculer la représentation eulérienne $\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t)$ de l'accélération.
- 10) Montrer si \underline{x} appartient au plan $x_3 = 0$ alors le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ aussi. Dessiner quelques vecteurs vitesse dans ce plan.
- 11) Dessiner l'allure des lignes de champs de \underline{U} dans le plan $x_3 = 0$.
- 12) Dessiner l'allure des lignes de champs de \underline{U} dans le plan $x_2 = 0$ pour le cas particulier $\alpha = \beta$. Indiquer alors la nature de ces courbes.

Grande déformation

- 13) Déterminer la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ associée au mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$ en supposant que $\underline{X}(\underline{a}, 0) = \underline{a}$.
- 14) Dessiner l'allure des trajectoires dans le plan $a_3 = 0$ puis dans le plan $a_2 = 0$.
- 15) Dans le plan $a_2 = 0$ et sur le même graphe que pour la question précédente, tracer les positions successives des petits vecteurs transportés par le mouvement $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ définis plus haut.
- 16) Déterminer l'expression de la norme $\|\underline{\delta x}(t)\|$. Vérifier que l'expression de la dérivée de cette fonction pour $t = 0$ est conforme aux résultats des questions précédentes. Donner l'allure de cette fonction du temps dans le cas particulier $\alpha = \beta$.
- 17) Déterminer l'expression de l'angle $\theta(t)$ que font $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ et donner

l'allure de cette fonction du temps. Vérifier que l'expression de la pente de cette fonction pour $t = 0$ est conforme aux résultats des questions précédentes.

- 18) Décrire le domaine $\Omega(t)$ et indiquer sa forme.
- 19) Calculer le tenseurs des dilatations $\underline{C}(\underline{a}, t)$.
- 20) En déduire $\|\underline{\delta x}(t)\|/\|\underline{\delta x}(0)\|$ et $\|\underline{\delta x}'(t)\|/\|\underline{\delta x}'(0)\|$. Comparer avec les expressions trouvées précédemment.

Fluide incompressible

On suppose maintenant que l'écoulement est celui d'un fluide incompressible de densité ρ_0 et de viscosité dynamique μ_n . On suppose que les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ sont nulles.

- 21) Montrer que ces hypothèses impliquent la relation $\chi = 2\alpha - \beta = 0$.
- 22) Écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement puis calculer la pression $p(\underline{x}, t)$ dans le domaine $\Omega(t)$ en supposant que la pression $p(\underline{0}, t) = p_0$ en $\underline{x} = \underline{0}$ reste constante.
- 23) Calculer la représentation lagrangienne $p^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la pression.
- 24) Calculer la résultante des forces extérieures de contact exercées par la paroi sur le fluide sur l'intersection $\Sigma(t)$ de la frontière $\partial\Omega(t)$ et du plan $x_3 = 0$ dans le cas où le fluide est parfait.
- 25) Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ dans le cas où le fluide est visqueux.
- 26) En déduire la résultante des forces extérieures de contact exercée sur la surface $\Sigma(t)$ dans ce cas.

Fluide compressible

On suppose maintenant que $\alpha = 0$. On suppose que l'écoulement est celui d'un fluide compressible de densité homogène ρ_0 à l'instant $t = 0$. On note μ_n sa viscosité dynamique et on suppose vérifiée l'hypothèse de Stokes $\lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n$. On suppose que les lois d'état de ce fluide sont $p = \rho(R/M)T$ et $e = C_v T$, où R est la constante des gaz parfaits, M la masse molaire du fluide et C_v sa capacité calorifique (constante) à volume constant.

On cherche à déterminer les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ et le chauffage volumique $r(\underline{x}, t)$ que l'on doit imposer pour obtenir le mouvement $\underline{U}(\underline{x})$ décrit plus haut ainsi qu'une température $T(\underline{x}, t) = T_0$ uniforme en espace et constante en temps.

- 27) Calculer la densité $\rho(\underline{x}, t)$.
- 28) En déduire la pression $p(\underline{x}, t)$ en utilisant le fait que $T(\underline{x}, t) = T_0$.
- 29) En déduire l'expression de la puissance volumique des efforts intérieurs $\pi_{\text{int}} = -\underline{\sigma} : \underline{D}$ en fonction de β , μ_n et T_0 .
- 30) En déduire $r(\underline{x}, t)$ et $\underline{f}(\underline{x}, t)$.
- 31) Calculer la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{the}}[\Omega(t)]$ pour tout temps.

- 32) En déduire la quantité de chaleur $Q(t_*)$ fournie au fluide entre le temps $t = 0$ et le temps $t = t_*$.
- 33) Calculer la puissance des forces extérieures $\mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)]$ pour tous temps.
- 34) En déduire le travail $W(t_*)$ fourni par les forces extérieures entre le temps $t = 0$ et le temps $t = t_*$.
- 35) Comparer $Q(t_*)$ et $W(t_*)$ avec le travail des efforts intérieurs fournis entre le temps $t = 0$ et le temps $t = t_*$.

Solide élastique

On considère un solide élastique homogène et isotrope de densité ρ_0 dont le comportement rhéologique est caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ . En l'absence de contraintes, ce solide élastique occupe la demi-sphère $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a_3 \geq 0 \text{ et } \|\underline{a}\| \leq l\}$. On soumet alors ce solide à des contraintes qui induisent la déformation $\underline{X}(\underline{a})$ suivante :

$$X_1 = a_1 e^{\alpha \tau}, \quad X_2 = a_2 e^{\alpha \tau} \quad \text{et} \quad X_3 = a_3 e^{-\beta \tau} \quad (9.25)$$

en supposant que le solide ainsi déformé est à l'équilibre (pas de mouvement).

- 36) On suppose que $\alpha \tau \ll 1$ et $\beta \tau \ll 1$. Montrer que cette hypothèse permet de se placer dans le cadre des petites déformations. On suppose alors que l'on peut confondre les représentations eulérienne et lagrangienne des champs décrivant le comportement du solide.
- 37) Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ dans le solide.
- 38) Calculer le champ $\underline{f}(\underline{a})$ des forces extérieures de volume que l'on a appliquées sur le solide.
- 39) Calculer la résultante $\underline{F}^{\text{disque}}$ des forces de contact extérieures au solide exercées sur la face située dans le plan $a_3 = 0$.
- 40) Calculer la résultante $\underline{F}^{\text{demi-sph}}$ des forces de contact exercée sur l'autre partie de la frontière du solide.

On suppose ensuite que le solide est animé du mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$X_1 = a_1 e^{\alpha t}, \quad X_2 = a_2 e^{\alpha t} \quad \text{et} \quad X_3 = a_3 e^{-\beta t}. \quad (9.26)$$

On s'intéresse aux temps courts tels que $\alpha t \ll 1$.

- 41) Calculer la densité $\underline{f}(\underline{a}, t)$ des forces extérieures volumiques responsables de ce mouvement.
- 42) Dessiner les lignes de champs $\underline{f}(\underline{a}, t)$ pour le cas particulier $\beta = -\alpha$.

Corrigé page 79

Corrigé Mouvement d'une demi-sphère

Cinématique

1) $\underline{\omega} = \underline{0}$ et on a donc $\underline{D} = \underline{K}$. Seules $D_{11} = D_{22} = \alpha$ et $D_{33} = -\beta$ sont non nulles. 2) Comme $\frac{d}{dt} \delta x = \underline{K} \delta x$ et \underline{K} est indépendant de l'espace,

l'évolution d'un petit vecteur transporté par le mouvement ne dépend pas de la trajectoire choisie. **3)** $\|\underline{\delta x}\| \frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}\|(t) = {}^t \underline{\delta x} \underline{D} \underline{\delta x} = \delta b(\alpha - \beta)$. On obtient le même résultat avec $\underline{\delta x}'$. Comme $\|\underline{\delta x}(0)\| = \|\underline{\delta x}'(0)\| = \delta b\sqrt{2}$, on a $\frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}\|(0) = \frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}'\|(0) = \delta b(\alpha - \beta)/\sqrt{2}$. **4)** $\|\underline{\delta x}(0)\| \|\underline{\delta x}'(0)\| \frac{d}{dt} [\pi/2 - \theta](0) = 2 {}^t \underline{\delta x}'(0) \underline{D} \underline{\delta x}(0) = 2(\delta b)^2(\alpha + \beta)$. D'où $\frac{d}{dt} \theta(0) = -(\alpha + \beta)$. **5)** Comme $\operatorname{div} \underline{U} = 2\alpha - \beta = \chi$ on a $\frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{U} d^3x = \chi \mathcal{V}(t)$. Donc $[1/\mathcal{V}(t)] \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) = \chi = 2\alpha - \beta$. **6)** On en déduit $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(0) \exp(\chi t)$ avec $\mathcal{V}(0) = \frac{2}{3}\pi l^3$. **7)** La loi de conservation de la masse peut s'écrire $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\chi$ ce qui entraîne $\frac{d}{dt} \operatorname{Ln}(\rho/\rho_0) = -\chi$. L'évolution temporelle de la densité est la même le long de toutes les trajectoires. En suivant une trajectoire fixée, la densité suit la loi $\rho(t) = \rho_0 \exp(-\chi t)$. La densité reste donc uniforme et évolue selon cette loi. On vérifie alors que $\rho(t)\mathcal{V}(t) = \rho_0\mathcal{V}(0)$. **8)** $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} B = \underline{U} \cdot \operatorname{grad} B = \alpha^2(x_1^2 + x_2^2) - \beta^2 x_3^2$. **9)** $\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \alpha^2 x_1 \underline{e}^{(1)} + \alpha^2 x_2 \underline{e}^{(2)} + \beta^2 x_3 \underline{e}^{(3)}$. **10)** Si $x_3 = 0$ alors $U_3 = 0$. Dans le plan $x_3 = 0$, les vecteurs vitesses sont sur des droites passant par $\underline{0}$. Leur intensité augmente proportionnellement à la distance à $\underline{0}$. **11)** Les lignes de champs de \underline{U} dans le plan $x_3 = 0$ sont des droites passant par $\underline{0}$. **12)** En résolvant $dx_1/U_1 = dx_3/U_3$, c'est-à-dire $dx_1/(\alpha x_1) = -dx_3/(\beta x_3)$, on obtient l'équation des lignes de champs $x_1^\beta x_3^\alpha = K$ où K est une constante dont la valeur fixe une ligne de champ particulière. Pour $\alpha = \beta$, les courbes $x_1 x_3 = K$ décrivent une famille d'hyperboles.

Grande déformation

13) En intégrant les équations différentielles non couplées $\frac{d}{dt} x_1 = \alpha x_1$, $\frac{d}{dt} x_2 = \alpha x_2$ et $\frac{d}{dt} x_3 = -\beta x_3$ avec les conditions initiales $x_i(0) = a_i$ pour $i = 1, 2, 3$ on obtient $x_1 = a_1 \exp(\alpha t)$, $x_2 = a_2 \exp(\alpha t)$ et $x_3 = a_3 \exp(-\beta t)$. **14)** Les trajectoires sont confondues avec les lignes de champs de \underline{U} car la vitesse ne dépend pas du temps. Pour tracer les trajectoires dans le plan $a_2 = 0$, on trace d'abord les trajectoires $a_1 = 0$ qui convergent vers $\underline{0}$, et les trajectoires $a_3 = 0$ qui en divergent. Les autres trajectoires sont les courbes $x_3 = K x_1^{-\beta/\alpha}$ pour toutes les valeurs de K . **15)** L'origine des petits vecteurs $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ peut être choisie en $\underline{0}$. Ces vecteurs s'étirent pour devenir parallèles à $\underline{e}^{(1)}$. **16)** $\underline{\delta x}(t)/\delta b = e^{\alpha t} \underline{e}^{(1)} + e^{-\beta t} \underline{e}^{(3)}$ et $\underline{\delta x}(t)/\delta b = e^{\alpha t} \underline{e}^{(1)} - e^{-\beta t} \underline{e}^{(3)}$. Donc $\|\underline{\delta x}(t)\| = \|\underline{\delta x}'(t)\| = \delta b \left(e^{2\alpha t} + e^{-2\beta t} \right)^{\frac{1}{2}}$. On en tire $\frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}\|(0)/\delta b = \frac{1}{2}(2\alpha - 2\beta)(2)^{-\frac{1}{2}} = (\alpha - \beta)/\sqrt{2}$, conformément à ce qui a déjà été trouvé. Dans le cas $\alpha = \beta$, la pente à $t = 0$ est nulle et la fonction $\|\underline{\delta x}(t)\| = \delta b [2\operatorname{ch}(2\alpha t)]^{\frac{1}{2}}$ est croissante. **17)** Comme $\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}' = \|\underline{\delta x}\| \|\underline{\delta x}'\| \cos \theta$, on a $\cos \theta = (e^{2\alpha t} - e^{-2\beta t})/(e^{2\alpha t} + e^{-2\beta t}) = \operatorname{th}[(\alpha + \beta)t]$. On a bien $\frac{d}{dt} \theta(0) = -(\alpha + \beta)$, en accord avec ce qui a déjà été établi. **18)** Comme la déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ s'exprime $a_1 = x_1 e^{-\alpha t}$, $a_2 = x_2 e^{-\alpha t}$ et $a_3 = x_3 e^{\beta t}$, on a $\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x_3 \geq 0 \text{ et } e^{-2\alpha t}(x_1^2 + x_2^2) + e^{2\beta t} x_3^2 \leq l^2\}$. Le domaine $\Omega(t)$, qui a initialement la forme d'une demi-sphère, prend la forme d'un demi-ellipsoïde d'axes $l e^{\alpha t}$ dans les directions x_1 et x_2 et $l e^{-\beta t}$ dans la

direction x_3 . **19)** Seules les composantes $C_{11} = C_{22} = e^{\alpha t}$ et $C_{33} = e^{-\beta t}$ sont non nulles. **20)** En posant $\underline{\delta a} = \underline{\delta x}(0)$ et $\underline{\delta a}' = \underline{\delta x}'(0)$, on a $\|\underline{\delta x}(t)\|/\|\underline{\delta x}(0)\| = \|\underline{\delta x}'(t)\|/\|\underline{\delta x}'(0)\| = ({}^t \underline{\delta a} \underline{C} \underline{\delta a})^{\frac{1}{2}}/\|\underline{\delta a}\| = (e^{2\alpha t} + e^{-2\beta t})^{\frac{1}{2}}/\sqrt{2}$, ce qui est conforme aux expressions des normes déjà trouvées.

Fluide incompressible

21) On a bien $\text{div } \underline{U} = \chi = 2\alpha - \beta = 0$. On a donc $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$. **22)** Outre cette relation, les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent $\rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } p + \underline{f} + \mu_n \Delta \underline{U}$. Comme $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{0}$, $\underline{f} = \underline{0}$ et $\Delta \underline{U} = \underline{0}$, il reste $\rho_0 \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\text{grad } p$. Ceci s'écrit $\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho_0 \alpha^2 x_1$, $\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho_0 \alpha^2 x_2$ et $\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho_0 \beta^2 x_3$. D'où $p = p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \alpha^2 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 x_3^2$ en utilisant le fait que $p(\underline{0}, t) = p_0$. **23)** On en déduit $p^{(L)}(\underline{a}, t) = p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \alpha^2 e^{2\alpha t} (a_1^2 + a_2^2) - \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 e^{-2\beta t} a_3^2$. **24)** Si le fluide est parfait le tenseur des contraintes est $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$. La résultante des forces extérieures de contact sur $\Sigma(t)$ est $\underline{F}(t) = \iint_{\Sigma} \underline{\sigma n} dS = -\iint_{\Sigma} p(-\underline{e}^{(3)}) dS = p_0 \pi l^2 e^{2\alpha t} \underline{e}^{(3)} - 2\pi \int_0^{l \exp(\alpha t)} \frac{1}{2} \rho_0 \alpha^2 r^3 dr \underline{e}^{(3)}$, ce qui entraîne $\underline{F}(t) = \pi l^2 e^{2\alpha t} (p_0 - \frac{1}{4} \rho_0 \alpha^2 l^2 e^{2\alpha t})$. **25)** Dans le cas visqueux, on a $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$. Seules les composantes $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p + 2\mu_n \alpha$ et $\sigma_{33} = -p + 2\mu_n \beta$ sont non nulles. **26)** On déduit facilement des deux questions précédentes que $\underline{F}(t) = \pi l^2 e^{2\alpha t} (p_0 - 2\mu_n \beta - \frac{1}{4} \rho_0 \alpha^2 l^2 e^{2\alpha t})$.

Fluide compressible

27) D'après le résultat $\rho = \rho_0 e^{-\chi t}$ avec $\chi = 2\alpha - \beta = -\beta$, on a $\rho = \rho_0 e^{\beta t}$. **28)** D'après la loi d'état on a donc $p(t) = \rho(R/M)T = \rho_0(R/M)T_0 e^{\beta t} = p_0 e^{\beta t}$ avec $p_0 = \rho_0(R/M)T_0$. **29)** Comme $\underline{\sigma} = -p \underline{I} - \frac{2}{3} \mu_n \text{div } \underline{U} \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$, seules les composantes $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p(t) + \frac{2}{3} \beta \mu_n$ et $\sigma_{33} = -p(t) - \frac{4}{3} \beta \mu_n$ sont non nulles. On en déduit $\underline{\sigma} : \underline{D} = \sigma_{33} D_{33} = \beta p(t) + \frac{4}{3} \beta^2 \mu_n$ et donc $\pi_{\text{int}}(t) = -\beta p_0 e^{\beta t} - \frac{4}{3} \beta^2 \mu_n$. **30)** L'équation de conservation de l'énergie $C_v \frac{dT}{dt} = r + k \Delta T + \underline{\sigma} : \underline{D}$ devient $r(t) = -\underline{\sigma} : \underline{D} = \pi_{\text{int}}(t) = -\beta p_0 e^{\beta t} - \frac{4}{3} \beta^2 \mu_n$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement $\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } p + \underline{f} + (\lambda_n + \mu_n) \text{grad } \text{div } \underline{U} + \mu_n \Delta \underline{U}$ devient $\underline{f}(t) = \rho \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \rho_0 \beta^2 x_3 e^{\beta t} \underline{e}^{(3)}$. **31)** Comme $\underline{Q} = -k \text{grad } T = \underline{0}$, on a $\mathcal{P}_{\text{the}}[\Omega(t)] = \iiint_{\Omega} r d^3x = r(t) \mathcal{V}(t)$ avec $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(0) e^{-\beta t}$ et $\mathcal{V}(0) = \frac{2}{3} \pi l^3$. Donc $\mathcal{P}_{\text{the}}[\Omega(t)] = -\frac{2\pi}{3} l^3 \beta (p_0 + \frac{4}{3} \beta \mu_n e^{-\beta t})$. **32)** On en déduit la chaleur fournie $Q(t_*) = \int_0^{t_*} \mathcal{P}_{\text{the}}[\Omega(t)] dt = \frac{2\pi}{3} l^3 \beta [-p_0 t_* + \frac{4}{3} \mu_n (e^{-\beta t_*} - 1)]$. **33)** On a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\Omega) = \mathcal{P}_{\text{extcont}}(\Omega) + \mathcal{P}_{\text{extvol}}(\Omega)$ avec $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\Omega) = \iint_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{U}$ et $\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x$. Comme $\text{div } \underline{\sigma} = 0$, on a $\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\Omega) = \iiint_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{D} d^3x = \frac{2\pi}{3} l^3 \beta (p_0 + \frac{4}{3} \beta \mu_n e^{-\beta t})$. En utilisant les expressions de \underline{f} et \underline{U} , on obtient $\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\Omega) = \rho_0 \beta^3 e^{\beta t} \iiint_{\Omega} x_3^2 d^3x$. Comme le fluide est incompressible, on a $J(\underline{a}, t) = 1$ ce qui permet d'effectuer le changement de variable $\iiint_{\Omega} x_3^2 d^3x = \iiint_{\Omega_0} a_3^2 e^{-2\beta t} d^3a = e^{-2\beta t} \int_0^l \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \sin^2 \theta) (2\pi r \cos \theta) r d\theta dr =$

$\frac{2\pi}{15}l^5 e^{-2\beta t}$. D'où $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\Omega) = \frac{2\pi}{3}l^3\beta \left(p_0 + \frac{4}{3}\beta\mu_n e^{-\beta t}\right) + \frac{2\pi}{15}l^5 \rho_0 \beta^3 e^{-\beta t}$ **34)** Le travail fourni est $W(t_*) = \frac{2\pi}{3}l^3\beta \left[-p_0 t_* + \left(\frac{4}{3}\mu_n - \frac{1}{5}l^2 \rho_0 \beta\right) \left(e^{-\beta t_*} - 1\right)\right]$ en utilisant $W(t_*) = \int_0^{t_*} \mathcal{P}_{\text{ext}}[\Omega(t)]dt$. **35)** L'équation de bilan de l'énergie interne $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{the}} - \mathcal{P}_{\text{int}}$ s'écrit ici $\mathcal{P}_{\text{the}} - \mathcal{P}_{\text{int}} = 0$. La chaleur fournie $Q(t_*)$ est donc égale au travail des efforts intérieurs.

Solide élastique

36) Le champ de déplacement est $\xi_1 = a_1(e^{\alpha\tau} - 1)$, $\xi_2 = a_2(e^{\alpha\tau} - 1)$ et $\xi_3 = a_3(e^{-\beta\tau} - 1)$. Le gradient du champ de déplacement \underline{H} est tel que $H_{11} = H_{22} = (e^{\alpha\tau} - 1) = \alpha\tau + O(\alpha^2\tau^2)$, $H_{33} = (e^{-\beta\tau} - 1) = -\beta\tau + O(\beta^2\tau^2)$, et $H_{ij} = 0$ sinon. La norme de \underline{H} est donc partout petite devant 1 : on est dans le cadre d'une petite déformation. **37)** Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a})$ est obtenu en appliquant la loi de Hooke en remarquant que $\underline{\epsilon} = \underline{H}$. On obtient alors $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)e^{\alpha\tau} + \lambda e^{-\beta\tau} - (3\lambda + 2\mu)$, $\sigma_{33} = 2\lambda e^{\alpha\tau} + (\lambda + 2\mu)e^{-\beta\tau} - (3\lambda + 2\mu)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. **38)** L'accélération est nulle car le solide est à l'équilibre. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc $\underline{0} = \text{div } \underline{\sigma}(\underline{a}) + \underline{f}(\underline{a})$. Comme $\underline{\sigma}(\underline{a})$ ne dépend pas de \underline{a} , sa divergence est nulle. On en déduit que $\underline{f}(\underline{a}) = \underline{0}$. **39)** La densité surfacique des forces de contact exercées sur la face $a_3 = 0$ est $\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{a}) = -\sigma_{33}\underline{e}^{(3)}$ où σ_{33} est la constante explicitée ci-dessus. Pour le calcul de la résultante, on peut considérer que l'on est dans le cadre des petits déplacements dans la mesure où $\|\underline{\xi}\|/l \ll 1$, et donc supposer que l'aire de cette face est peu différente de l'aire du disque $a_3 = 0$ de Ω_0 , c'est-à-dire $4\pi l^2$ (sinon, il faudrait multiplier cette aire par $e^{2\alpha\tau}$ qui est proche de 1). La résultante des forces de contact exercée sur ce disque est donc $\underline{F}^{\text{disque}} = -\pi l^2 \sigma_{33} \underline{e}^{(3)}$. **40)** Comme $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$, la résultante des forces de contact exercée sur la frontière du solide est nulle. On a donc $\underline{F}^{\text{demi-sph}} = -\underline{F}^{\text{disque}} = \pi l^2 \sigma_{33} \underline{e}^{(3)}$. **41)** L'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation de Lamé) s'écrit $\rho_0 \underline{\Gamma}(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{\sigma}(\underline{a}, t) + \underline{f}(\underline{a}, t)$, où l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{a}, t)$ a pour composantes $\Gamma_1 = \alpha^2 a_1 e^{\alpha t}$, $\Gamma_2 = \alpha^2 a_2 e^{\alpha t}$ et $\Gamma_3 = \beta^2 a_3 e^{-\beta t}$. Comme précédemment, on a $\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0}$. On en déduit que $\underline{f}(\underline{a}, t) = -\rho_0 \underline{\Gamma}(\underline{a}, t)$ **42)** Dans le cas $\beta = -\alpha$, le champ de force est $\underline{f}(\underline{a}, t) = -\rho_0 \alpha^2 e^{\alpha t} \underline{a}$. Les lignes de champs sont des droites passant toutes par $\underline{0}$. Les vecteurs pointent vers $\underline{0}$ et leur intensité est proportionnelle à la distance au centre.

EXAMEN 1999

Les questions 1 à 13, 21 à 26 et 30 à 37 ont déjà été posées lors du partiel.

PROBLÈME 9.37 Tourbillon dans une boîte**Mouvement dans les coins**

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse est définie par les relations $U_1 = -\beta x_1$, $U_2 = 0$ et $U_3 = \beta x_3$. On suppose que β est une constante positive.

- 1) Calculer la représentation eulérienne $\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t)$ du champ d'accélération.
- 2) Montrer que l'écoulement est isochore (volumes constants au cours du temps).
- 3) Calculer le tenseur des déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$ associé à ce mouvement.
- 4) Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ associé à ce mouvement.
- 5) Vérifier la relation $\frac{d}{dt}\underline{U} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \frac{1}{2}\text{grad } U^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$ sur l'exemple de ce mouvement.
- 6) Calculer la représentation lagrangienne de ce mouvement sous la forme de la famille des déformations $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ en choisissant la convention $\underline{a} = \underline{X}(\underline{a}, 0)$.
- 7) On suppose qu'à $t = 0$ les particules sont contenues dans le domaine $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3; a_1 \geq 0 \text{ et } a_3 \geq 0\}$. Décrire le domaine $\Omega(t)$ occupé par ces particules à l'instant t .
- 8) Dessiner les trajectoires dans l'intersection du domaine $\Omega(t)$ avec le plan $x_2 = 0$.
- 9) Déterminer et dessiner les lignes de champs du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ dans le plan $x_2 = 0$.
- 10) Donner l'expression de la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ de vitesse.
- 11) En déduire la représentation lagrangienne $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ d'accélération. Comparer avec la représentation eulérienne $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ de l'accélération calculée aux questions précédentes.
- 12) Si ρ_0 est la densité de ce fluide à l'instant $t = 0$, calculer la densité $\rho(\underline{x}, t)$ aux instants ultérieurs.
- 13) Dessiner les lignes de champs du champ d'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$.

On suppose que ce mouvement est celui d'un fluide newtonien caractérisé par la viscosité dynamique μ_n . On suppose que les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ sont nulles.

- 14) Ecrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement en utilisant l'expression connue du champ de vitesse et en introduisant le champ de pression $p(\underline{x}, t)$ pour l'instant inconnu.
- 15) On suppose que la pression $p(\underline{0}, t) = p_0$ est connue. En déduire le champ de pression $p(\underline{x}, t)$.
- 16) Dessiner les isobares (iso-pression) dans le plan $x_2 = 0$. Indiquer par la lettre A le maximum du champ de pression.
- 17) Donner l'expression du tenseur des contraintes dans tout le fluide.

- 18) Calculer les forces de contact exercées par le fluide sur les frontières du domaine Ω_0 .
- 19) Effectuer l'application numérique pour les valeurs $\beta = 1 \text{ s}^{-1}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\mu_n = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Commenter le rapport entre les forces visqueuses et les forces de pression.
- 20) Dessiner une trajectoire disjointe de la frontière du domaine Ω_0 . Tracer quelques vecteurs accélération le long de cette trajectoire. Indiquer le sens de variation de la pression en suivant cette trajectoire. Comparer-le avec le signe l'accélération tangentielle.

Mouvement au centre

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse est définie par les relations $U_1 = -\beta x_3$, $U_2 = 0$ et $U_3 = \beta x_1$. On suppose que β est une constante positive.

- 21) Calculer le champ d'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$.
- 22) Calculer le tenseur des déformations $\underline{D}(\underline{x}, t)$.
- 23) Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$.
- 24) Vérifier la relation $\frac{d}{dt}\underline{U} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \frac{1}{2}\text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$ sur l'exemple de ce mouvement.
- 25) Si ρ_0 est la densité de ce fluide à l'instant $t = 0$, calculer la densité $\rho(\underline{x}, t)$ aux instants ultérieurs.
- 26) Dessiner les trajectoires du mouvement et les lignes de champ du champ de vitesse dans le plan $x_2 = 0$. le long de cette trajectoire.

On suppose que ce mouvement est celui d'un fluide newtonien caractérisé par la viscosité dynamique μ_n . On suppose que les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ sont nulles.

- 27) Calculer le champ de pression $p(\underline{x}, t)$ en sachant que $p(\underline{0}, t) = p_0$.
- 28) Dessiner les isobares (iso-pression) dans le plan $x_2 = 0$. Indiquer par la lettre D le minimum du champ de pression.
- 29) Dessiner une trajectoire ne passant pas par le point $\underline{0}$. Tracer quelques vecteurs accélération le long de cette trajectoire. Indiquer comment varie la pression en suivant cette trajectoire. Comparer-le avec la valeur l'accélération tangentielle.

Mouvement dans toute la boîte

On considère un mouvement dont la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse est définie par les relations

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{\beta}{k} \cos(kx_1) \sin(kx_3) \\ U_2 &= 0 \\ U_3 &= \frac{\beta}{k} \sin(kx_1) \cos(kx_3) \end{aligned} \quad (9.27)$$

où β et k sont des constantes positives.

- 30) Si ρ_0 est la densité de ce fluide à l'instant $t = 0$, calculer la densité $\rho(\underline{x}, t)$ aux instants ultérieurs.
- 31) Montrer qu'il existe une fonction de courant $\psi(\underline{x})$ telle que $U_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_3}$ et $U_3 = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}$. Déterminer cette fonction de courant.
- 32) Montrer que la valeur de la fonction de courant est constante le long des trajectoires.
- 33) On suppose qu'à l'instant $t = 0$ les particules sont situées dans le domaine $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3; |a_1| \leq l \text{ et } |a_3| \leq l\}$ avec $l = \frac{\pi}{2k}$. Calculer $\Omega(t)$ aux instants ultérieurs.
- 34) Indiquer les points du domaine dont la vitesse est nulle et déterminer les trajectoires des particules situées sur la frontière de $\Omega(t)$.
- 35) En effectuant un développement limité de $\psi(\underline{x})$ au voisinage de $\underline{x} = \underline{0}$, dessiner les trajectoires au voisinage de ce point.
- 36) En effectuant un développement limité de $\psi(\underline{x})$ au voisinage de $\underline{x} = (-l, 0, -l)$ dessiner les trajectoires au voisinage de ce point.
- 37) En déduire l'allure des trajectoires dans tout le domaine $\Omega(t)$.

On suppose que ce mouvement est celui d'un fluide parfait. On suppose que les forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{x}, t)$ sont nulles.

- 38) Calculer le champ de pression $p(\underline{x}, t)$ en sachant que $p(\underline{0}, t) = p_0$.
- 39) Tracer les isobares dans le plan $x_2 = 0$ en indiquant par la lettre D le minimum et par la lettre A les maxima.
- 40) Commenter la relation entre les trois écoulements fluides étudiés dans ce problème.

Corrigé page 85

Corrigé Tourbillon dans une boîte

Mouvement dans les coins

1) Les composantes de l'accélération sont $\frac{dU_1}{dt} = U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \beta^2 x_1$, $\frac{dU_2}{dt} = 0$ et $\frac{dU_3}{dt} = U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \beta^2 x_3$. 2) Le mouvement est isochore car $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0$. 3) Seules les composantes $D_{11} = -\beta$ et $D_{33} = \beta$ sont non nulles. 4) Comme $\underline{K} = \underline{D}$ on a $\underline{\Omega} = 0$ d'où $\underline{\omega} = \underline{0}$. 5) $\frac{d}{dt} \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } U^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\beta^2 x_1^2 + \beta^2 x_3^2), 0, \frac{\partial}{\partial x_3} (\beta^2 x_1^2 + \beta^2 x_3^2) \right] = (\beta^2 x_1, 0, \beta^2 x_3)$. 6) Les trajectoires sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t)]$ qui s'écrit $\frac{dx_1}{dt} = -\beta x_1$, $\frac{dx_2}{dt} = 0$ et $\frac{dx_3}{dt} = \beta x_3$ dont les solutions sont $x_1(t) = a_1 \exp(-\beta t)$, $x_2(t) = a_2$ et $x_3(t) = a_3 \exp(\beta t)$ en tenant compte des conditions initiales $\underline{x}(0) = \underline{a}$. La famille des déformations $\underline{X}(\underline{a}, t)$ vérifie donc $X_1 = a_1 \exp(-\beta t)$, $X_2 = a_2$ et $X_3 = a_3 \exp(\beta t)$. 7) Les plans $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$ contiennent les trajectoires issues des plans $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$ qui constituent la frontière $\partial\Omega_0$. Par conséquent $\Omega(t) = \Omega_0$ pour tous temps. On remarque aussi que $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ sur

la frontière. **8)** Les trajectoires forment une famille d'hyperboles d'équations $x_1 x_3 = a_1 a_3$ dans les plans (x_1, x_3) . **9)** Les lignes de champs de \underline{U} sont confondues avec les trajectoires puisque le mouvement est permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} = 0$). **10)** La représentation lagrangienne $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ s'écrit $U_1^{(L)} = -\beta a_1 \exp(-\beta t)$, $U_2^{(L)} = 0$ et $U_3^{(L)} = \beta a_3 \exp(\beta t)$. **11)** La représentation lagrangienne $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ s'écrit $\Gamma_1^{(L)} = \beta^2 a_1 \exp(-\beta t)$, $\Gamma_2^{(L)} = 0$ et $\Gamma_3^{(L)} = -\beta^2 a_3 \exp(\beta t)$. On retrouve bien $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \underline{\Gamma}^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] = (\beta^2 x_1, 0, \beta^2 x_3)$. **12)** D'après la loi de conservation de la masse $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$ et $\operatorname{div} \underline{U} = 0$, on a $\frac{d\rho}{dt} = 0$ et donc $\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) = 0$. Donc $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$. D'où $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$. On peut aussi invoquer la loi de conservation de la masse $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0$ en représentation lagrangienne et utiliser le fait que $J(\underline{a}, t) = 1$. **13)** Les lignes de champs de $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t) = \beta^2(x_1, 0, x_3)$ forment une famille des droites concentriques de centre O dans les plans (x_1, x_3) . **14)** $\rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{f} - \operatorname{grad} p + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underline{U}) + \mu_n \Delta \underline{U}$. Comme $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ et $\underline{f} = \underline{0}$, il reste $\rho_0 \frac{d\underline{U}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mu_n \Delta \underline{U}$ (Navier-Stokes incompressible). On remarque ensuite que $\Delta \underline{U} = \underline{0}$. D'où les trois équations $\rho_0 \beta^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$, $\rho_0 \beta^2 x_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$. **15)** On en déduit $p(\underline{x}, t) = p_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 (x_1^2 + x_3^2)$. **16)** Les isobares sont des cercles de centre O . **17)** Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$ est diagonal avec $D_{11} = -p - 2\mu_n \beta$, $D_{33} = -p + 2\mu_n \beta$ et $D_{22} = -p$. **18)** La force surfacique exercée par la frontière $x_1 = 0$, de normale $\underline{n} = -\underline{e}^{(1)}$, sur le fluide est $\underline{\sigma} \underline{n}$. La force surfacique exercée par le fluide sur cette frontière est donc l'opposée c'est à dire $\underline{F}^{(1)} = -\underline{\sigma}(-\underline{e}^{(1)}) = (-p - 2\mu_n \beta) \underline{e}^{(1)}$. La force surfacique exercée par le fluide sur la frontière $x_3 = 0$, de normale $\underline{n} = -\underline{e}^{(3)}$, est $\underline{F}^{(3)} = -\underline{\sigma}(-\underline{e}^{(3)}) = (-p + 2\mu_n \beta) \underline{e}^{(3)}$. **19)** Comme $p_0 = 10^5$ Pa et $2\mu_n \beta = 2 \cdot 10^{-3}$ Pa, on a $2\mu_n \beta \ll p_0$. Les forces visqueuses sont négligeables devant les forces de pression pour le calcul des forces surfacique exercées sur les frontières. **20)** Le long d'une trajectoire ayant la forme d'une hyperbole, l'accélération tangentielle est négative avant de couper la première bissectrice, positive après. L'accélération normale est maximale lorsque la trajectoire coupe la première bissectrice. Ce point correspond aussi à un maximum de pression, croissante (décroissante) lorsque l'accélération tangentielle est négative (positive).

Mouvement au centre

21) Les composantes de l'accélération $\underline{\Gamma}$ sont $\frac{dU_1}{dt} = U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = -\beta^2 x_1$, $\frac{dU_2}{dt} = 0$ et $\frac{dU_3}{dt} = U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = -\beta^2 x_3$. **22)** Seules les composantes $K_{31} = \beta$ et $K_{13} = -\beta$ du gradient $\underline{K} = \operatorname{grad} \underline{U}$ sont non nulles. Comme \underline{K} est antisymétrique, $\underline{D} = \underline{0}$. **23)** On a donc $\underline{\Omega} = \underline{K}$. En appliquant la relation $\Omega_{13} + \omega_2 = 0$ on voit que $\omega_2 = -\beta$ et donc $\underline{\omega} = -\beta \underline{e}^{(2)}$. On en tire $\operatorname{rot} \underline{U} = 2\underline{\omega} = -2\beta \underline{e}^{(2)}$. **24)** $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \underline{U}^2 + \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} = (\beta^2 x_1, 0, \beta^2 x_3) - (2\beta^2 x_1, 0, 2\beta^2 x_3) = (-\beta^2 x_1, 0, -\beta^2 x_3)$. On retrouve bien l'expression de $\underline{\Gamma}$. **25)** Comme $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ on a $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$. Le mouvement est isochore. **26)** Les trajectoires et les lignes de champs de \underline{U} sont des cercles concentriques de centre O dans le plan

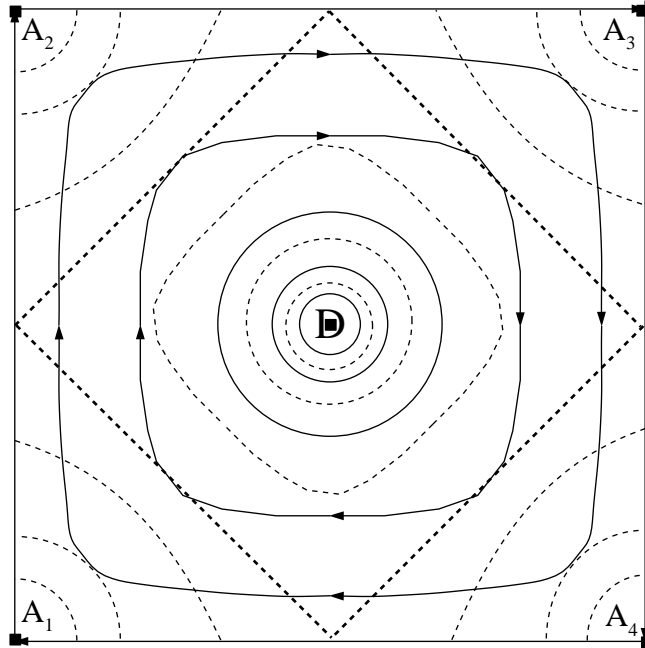


Figure 9.8: Trajectoires (—) et isobares (- - -)

(x_1, x_3) . **27)** On a $\rho_0 \frac{d}{dt} \underline{U} = -\text{grad } p + \mu_n \Delta \underline{U}$ (Navier-Stokes incompressible). On remarque ensuite que $\Delta \underline{U} = \underline{0}$. D'où les trois équations $-\rho_0 \beta^2 x_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$, $-\rho_0 \beta^2 x_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$. D'où $p(\underline{x}, t) = p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \beta^2 (x_1^2 + x_3^2)$. **28)** Les isobares sont des cercles de centre O . **29)** Les particules décrivent des cercles avec une accélération tangentielle nulle. La pression est constante le long d'une trajectoire.

Mouvement dans toute la boîte

30) Comme $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \beta \sin(kx_1) \sin(kx_3) - \beta \sin(kx_1) \sin(kx_3) = 0$, on a $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$. **31)** La fonction $\psi(\underline{x}) = -(\beta/k^2) \cos(kx_1) \cos(kx_3)$ vérifie bien $U_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$ et $U_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$. **32)** La fonction $f(t) = \psi[\underline{x}(t)]$ lorsque $\underline{x}(t)$ est une trajectoire ($\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{U}$) est telle que $f'(t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} U_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} U_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} U_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right) = 0$. Donc f , c'est-à-dire ψ est constant le long d'une trajectoire. **33)** Comme $\psi(\underline{x}) = 0$ sur toute la frontière $\partial\Omega_0$, cette frontière est constituée de trajectoires. On en déduit que $\Omega(t) = \Omega_0$ pour tous temps. **34)** Pour $x_1 = \pm l$ on a $U_1 = 0$ et $U_3 = \pm(\beta/k) \cos(kx_3)$. Pour $x_3 = \pm l$ on a $U_1 = \mp(\beta/k) \cos(kx_1)$ et $U_3 = 0$. Ceci détermine les trajectoires aux frontières en y incluant les quatre coins A_1, A_2, A_3 et A_4 du carré dans le plan (x_1, x_3) pour lesquels la vitesse est nulle (il y a donc huit trajectoires au total : 4 points et 4 segments de droites). **35)** Au voisinage de $\underline{0}$ on a $\psi(\underline{x}) = -(\beta/k^2) + (\beta/2)(x_1^2 + x_3^2) + O(\|\underline{x}\|^3)$. Les trajectoires vérifient $\psi(\underline{x}) = \text{cste}$ et sont alors des cercles pour $\|\underline{x}\|$ petit. **36)** Au voisinage de $B(-l, 0, -l)$ on pose

$x_1 = -l + y_1$ et $x_3 = -l + y_3$ ce qui permet d'écrire $\psi(\underline{x}) = -(\beta/k^2) \cos(-\pi/2 + ky_1) \cos(-\pi/2 + ky_2) = -\beta y_1 y_2 + O(\|\underline{y}\|^3)$. Les trajectoires vérifient $\psi(\underline{x}) = cste$ et sont alors des hyperboles pour $\|\underline{y}\|$ petit. **37)** Par symétrie, les trajectoires autour des trois autres coins sont des hyperboles. En connectant les cercles du centre de la boîte aux hyperboles des quatre coins, les trajectoires décrivent un tourbillon. **38)** Comme le fluide est parfait et incompressible, on a $\rho_0 \frac{d}{dt} \underline{U} = -\text{grad } p$ (Euler incompressible). D'où les trois équations $\rho_0 \left(U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$, $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $\rho_0 \left(U_1 \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$. Le calcul conduit à $-\frac{1}{2} \rho_0 \beta \sin(2kx_1) = -\frac{\partial p}{\partial x_1}$ et $-\frac{1}{2} \rho_0 \beta \sin(2kx_3) = -\frac{\partial p}{\partial x_3}$. D'où $p(\underline{x}, t) = p_0 - \frac{1}{4} (\rho_0 \beta / k) [\cos(2kx_1) + \cos(2kx_3) - 2] - 2$. **39)** Les quatre droites $x_1 \pm x_3 = \pm l$ sont des isobares qui forment un carré inscrit à 45° dans la boîte. La dépression (D) du centre de la boîte est entourée d'isobares allant des cercles de son voisinage à ce carré inscrit. Les anticyclones (A) des quatre coins sont entourés d'isobares allant des cercles de leurs voisinages aux segments de ce carré inscrit. **40)** Les deux premiers mouvements sont les approximations du dernier autour du coin A_1 (et donc des quatre coins par symétrie) et du centre D .

EXAMEN 1998

L'examen 1998 était constitué du problème "Cylindre fluide dans un solide".

PROBLÈME 9.38

 Cylindre fluide dans un solide

On note $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$ le repère orthonormé canonique de \mathbb{R}^3 . On considère un milieu continu élastique dont l'état naturel (en l'absence de toute contraintes) est contenu dans le domaine $\Omega_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3; |a_1| \leq l_1, |a_2| \leq l_2, |a_3| \leq l_3\}$. On suppose que $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ et on utilisera les valeurs $l_1 = 10$ cm, $l_2 = 20$ cm et $l_3 = 30$ cm pour les applications numériques. On note S_i la face de normale $\underline{e}^{(i)}$ pour $i = 1, 2, 3$.

La densité du milieu dans son état naturel est $\rho_0 = 10^3$ kg/m³. On suppose que le comportement élastique de ce milieu obéit à la loi de Hooke avec $E = 0.28 \cdot 10^9$ Pa pour le module de Young et $\nu = 0.4$ pour le coefficient de Poisson. On se place donc dans le cadre de l'élasticité linéaire et on suppose que l'hypothèse des petites déformations et des petits déplacements est vérifiée. On pourra ainsi confondre les représentations lagrangiennes et eulériennes des champs ainsi que le domaine Ω_0 et son déformé Ω .

On rappelle que les coefficients de Lamé vérifient $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ et $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$. On a aussi $\lambda = \nu E/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ et $\mu = E/[2(1 + \nu)]$.

Encastrement sur les arêtes

On applique à ce milieu des efforts extérieurs caractérisés par une densité volumique de forces $\underline{f}(\underline{x})$ d'une part et une densité surfacique de forces de contact $\underline{E}_{\text{cont}}(\underline{x})$ sur la frontière $\partial\Omega$ d'autre part. On ne s'intéresse ici qu'aux états

d'équilibre, ce qui implique que le champ de vitesse est nul. La réponse du milieu élastique à ces contraintes est caractérisée par un champ de déplacement

$$\underline{\xi}(\underline{a}) = -\gamma (a_1^2 - l_1^2)\underline{e}^{(3)} + \gamma (a_2^2 - l_2^2)\underline{e}^{(3)} \quad (9.28)$$

où γ est une constante telle que le $\eta = 2 \gamma l_1$ est un nombre très petit devant 1 ($\eta \ll 1$).

- 1) Donner la dimension (unités) de γ . Calculer γ sachant que $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$.
- 2) Calculer le champ de déplacement sur chacune des faces du parallélépipède.
- 3) Représenter graphiquement les déplacements sur les faces S_1 et S_2 .
- 4) Tracer le lieu des points de la face S_3 dont le déplacement est nul. Indiquer les régions où ξ_3 est positif.
- 5) Donner la valeur numérique des coefficients de Lamé λ et μ .
- 6) Calculer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$ et interpréter brièvement ses composantes.
- 7) Donner l'expression des composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{a})$.
- 8) En déduire la densité volumique des forces extérieures de volume $\underline{f}(\underline{a})$.
- 9) Calculer la densité surfacique des forces de contact sur chacune des faces du parallélépipède.
- 10) Représenter sur le graphique précédent les forces de contact sur les faces S_1 et S_2 .
- 11) Tracer sur la face S_3 les lignes de champs du champ de forces de contact, qui passent par le centre de cette face.
- 12) On note S_3^+ l'intersection de S_3 avec les demi-espaces $a_1 \geq 0$ et $a_2 \geq 0$. Donner la valeur numérique des résultantes \underline{F}_1 , \underline{F}_2 et \underline{F}_3^+ des forces de contacts sur les faces ou quart de faces S_1 , S_2 et S_3^+ .
- 13) Calculer la résultante des forces de contacts exercées sur la frontière de Ω_0 .
- 14) Donner la valeur numérique des moments en $\underline{0}$ des forces de contacts sur les faces ou quart de faces S_1 , S_2 et S_3^+ .
- 15) Calculer le moment en $\underline{0}$ des forces de contacts exercées sur la frontière de Ω .

Inclusion fluide

On considère le sous-domaine cylindrique ($r < l_1$) défini par

$$\mathcal{D}_0 = \{\underline{a} \in \mathbb{R}^3; |a_1| < r, a_2^2 + a_3^2 = r^2\}. \quad (9.29)$$

On suppose que le cylindre \mathcal{D}_0 est rempli par un fluide newtonien incompressible de même densité ρ_0 que le milieu élastique. Ce fluide est caractérisé par la viscosité cinématique $\mu_n = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et l'hypothèse de Stokes $\lambda_n = -2\mu_n/3$. On suppose que ce fluide est animé d'une vitesse

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = -\beta(x_1^2 - l_1^2)\underline{e}^{(3)} + \beta(x_2^2 - l_2^2)\underline{e}^{(3)} \quad (9.30)$$

avec $\beta = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Ce mouvement définit l'évolution du sous-domaine $\mathcal{D}(t)$ issu du cylindre $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(0)$.

On suppose que le champ de déplacement du milieu élastique, occupant l'extérieur de $\mathcal{D}(t)$, est maintenant donné par l'expression

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \alpha \underline{a} - \phi t(a_1^2 - d_1^2) \underline{e}^{(3)} + \phi t(a_2^2 - d_2^2) \underline{e}^{(3)} \quad (9.31)$$

avec $\alpha = -10^{-2}$, $\phi = \beta(1 + \alpha)^2$, $d_1 = l_1/(1 + \alpha)$ et $d_2 = l_2/(1 + \alpha)$.

- 16) Calculer la représentation eulérienne du champ de vitesse dans le milieu élastique. En déduire la compatibilité géométrique des mouvements du milieu élastique et du fluide.

Dans tout ce qui suit, on suppose que t reste suffisamment petit pour que l'hypothèse des petites déformations et des petits déplacements reste valide.

- 17) En invoquant la loi de conservation de la quantité de mouvement, calculer les forces extérieures de volume \underline{f} exercées sur le milieu élastique étant donné ce nouveau champ de déplacement.
- 18) On suppose que les forces extérieures de volume \underline{f} exercées sur le fluide sont nulles. En invoquant la loi de conservation de la quantité de mouvement, montrer que le champ de pression p du fluide est homogène en espace.
- 19) Déterminer la résultante des forces de contacts exercées par le milieu élastique sur le fluide.
- 20) Déterminer la résultante des forces de contacts exercées par le fluide sur le milieu élastique.
- 21) Sous l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations, montrer que les champs de contraintes du fluide et du milieu élastique ne sont pas compatibles, sauf pour un instant particulier t_* dont on donnera la valeur numérique.
- 22) Calculer dans ce cas la valeur numérique de la pression p_* .
- 23) Reprendre les questions précédente dans le cas où l'inclusion fluide est un sous-domaine \mathcal{D}_0 quelconque.

Corrigé page 90

Corrigé **Cylindre fluide dans un solide**

Encastrement sur les arêtes

1) $\gamma = \eta/(2l_1) = 10^{-1} \text{ m}^{-1}$. **2)** Le déplacement est caractérisé par $\xi_3 = \gamma(a_2^2 - l_2^2)$ sur S_1 , par $\xi_3 = -\gamma(a_1^2 - l_1^2)$ sur S_2 et $\xi_3 = \gamma(a_2^2 - a_1^2) - \gamma(l_2^2 - l_1^2)$ sur S_3 . Pour les trois autres faces on remarque que les déplacements sont identiques sur deux faces opposées. **3)** Le profil de déplacement est parabolique sur les faces S_1 et S_2 en s'annulant sur les arêtes. Le déplacement est "vers le haut" ($x_3 > 0$) pour S_2 et "vers le bas" pour S_1 . **4)** Le déplacement est nul le long de deux paraboles reliant les coins de la face S_3 d'un même petit côté et positif

sur ces petits côtés. **5)** On a $\lambda = 4 \cdot 10^8$ Pa et $\mu = 10^8$ Pa. **6)** Seuls $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\gamma a_1$ et $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \gamma a_2$ sont non nuls. L'allongement relatif est nul dans les trois directions de la base canonique. Les taux de glissement des couples de direction de base sont $\gamma_{13} = -2\gamma a_1$, $\gamma_{23} = -2\gamma a_2$ et $\gamma_{12} = 0$. Par exemple $\underline{\epsilon}$ est nul sur la droite Oa_3 . **7)** Seuls $\sigma_{13} = \sigma_{31} = -2\mu\gamma a_1$ et $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu\gamma a_2$ sont non nuls. **8)** Le milieu étant à l'équilibre, l'équation de Lamé ou plutôt l'équation de Lamé-Clapeyron s'écrit $\underline{f}(\underline{a}) + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}) = 0$. Comme $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0}$ on a $\underline{f} = \underline{0}$. **9)** La densité surfacique de forces de contact est $\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{a}) = -2\mu\gamma l_1 \underline{e}^{(3)} = -2\underline{e}^{(3)} 10^6$ Pa sur la face S_1 , $\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{a}) = 2\mu\gamma l_2 \underline{e}^{(3)} = 4\underline{e}^{(3)} 10^6$ Pa sur la face S_2 et $\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{a}) = -2\mu\gamma a_1 \underline{e}^{(1)} + 2\mu\gamma a_2 \underline{e}^{(2)}$ sur la face S_3 . Ces vecteurs sont identiques sur les faces opposées respectives. **10)** La densité de force est constante et dirigée "vers le haut" sur S_2 et "vers le bas" sur S_1 avec une intensité réduite d'un facteur $l_1/l_2 = 1/2$ pour S_1 par rapport à S_2 . **11)** Les droites Oa_1 et Oa_2 sont des lignes de champ du champ de forces de contacts appliquées à la face S_3 . **12)** On a $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1 = 2\mu\gamma l_1 l_2 l_3 \underline{e}^{(3)} = 12\underline{e}^{(3)} 10^4$ N et $\underline{F}_3^+ = -\mu\gamma l_1^2 l_2 \underline{e}^{(1)} + \mu\gamma l_1 l_2^2 \underline{e}^{(2)} = (-2\underline{e}^{(1)} + 4\underline{e}^{(2)}) 10^4$ N. **13)** Comme $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0}$, la résultante des forces de contact exercées sur $\partial\Omega_0$ est nulle. **14)** Pour les moments on a $\underline{M}_1 = 2\mu\gamma l_1^2 l_2 l_3 \underline{e}^{(2)} = 12\underline{e}^{(2)} 10^3$ Nm, $\underline{M}_2 = 2\mu\gamma l_1 l_2^2 l_3 \underline{e}^{(1)} = 24\underline{e}^{(1)} 10^3$ Nm et $\underline{M}_3^+ = -\mu\gamma l_1 l_2 l_3 (l_2 \underline{e}^{(1)} + l_1 \underline{e}^{(2)}) = -(2\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}) 10^4$ Nm. **15)** Comme $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0}$ et $\underline{\sigma}$ symétrique, le moment des forces de contact exercées sur $\partial\Omega_0$ est nulle.

Inclusion fluide

16) Le champ de déplacement dans le milieu élastique est associé à un champ de vitesse dont la représentation lagrangienne est $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = -\phi(a_1^2 - d_1^2) \underline{e}^{(3)} + \phi(a_2^2 - d_2^2) \underline{e}^{(3)}$. La représentation eulérienne de ce champ de vitesse s'obtient en calculant la déformation inverse de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a}, t) = [(1 + \alpha)a_1, (1 + \alpha)a_2, (1 + \alpha)a_3 - \phi t(a_1^2 - d_1^2) + \phi t(a_2^2 - d_2^2)]$ qui s'écrit $\underline{A}(\underline{x}, t) = [\frac{1}{1+\alpha}x_1, \frac{1}{1+\alpha}x_2, \frac{1}{1+\alpha}[x_3 + \phi t(\frac{1}{(1+\alpha)^2}x_1^2 - d_1^2) - \phi t(\frac{1}{(1+\alpha)^2}x_2^2 - d_2^2)]]$. On a donc $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\phi \left(\frac{1}{(1+\alpha)^2}x_1^2 - d_1^2 \right) \underline{e}^{(3)} + \phi \left(\frac{1}{(1+\alpha)^2}x_2^2 - d_2^2 \right) \underline{e}^{(3)}$ ce qui s'écrit encore $\underline{U}(\underline{x}, t) = -\beta(x_1^2 - l_1^2) \underline{e}^{(3)} + \beta(x_2^2 - l_2^2) \underline{e}^{(3)}$. On vérifie ainsi la continuité du champ de vitesse. **17)** Les composantes non nulles du tenseur des petites déformations $\underline{\epsilon}(\underline{a}, t)$ sont $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \alpha$ pour les composantes diagonales et $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\phi t a_1$ et $\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \phi t a_2$. On en déduit que les composantes non nulles de $\underline{\sigma}(\underline{a}, t)$ en confondant les représentations lagrangiennes et eulériennes du tenseur des contraintes qui sont donc $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)\alpha$ pour les composantes diagonales et $\sigma_{13} = \sigma_{31} = -2\mu\phi t a_1$ et $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu\phi t a_2$. Ce tenseur vérifie $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = 0$. D'autre part l'expression du champ de déplacement entraîne que $\rho_0 \partial^2 \underline{\xi} / \partial t^2 = 0$. Par conséquent, l'équation de Lamé entraîne $\underline{f} = 0$. **18)** Le tenseur des taux de déformation $\underline{D}(\underline{x}, t)$ est tel que seuls $D_{12} = D_{21} = -\beta x_1$ et $D_{13} = D_{31} = \beta x_2$ sont non nuls. Le tenseur des contraintes est donc égale à $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$. Donc $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -2\mu_n \beta x_1$ et $\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu_n \beta x_2$. Sa divergence est alors $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = -\underline{\text{grad}} p$. Comme

l'accélération est nulle et $\underline{f} = 0$ l'équation de conservation de la quantité de mouvement entraîne que $\underline{\text{grad}} p = \underline{0}$. On en déduit que la pression est un scalaire $p(t)$ indépendant de \underline{x} . **19)** La résultante des forces de contact exercées par l'extérieur de $\partial\mathcal{D}_0$ s'écrit $\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{\sigma}\underline{n} dS = \underline{0}$. Comme $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0}$ cette résultante est nulle. **20)** Même réponse pour l'intérieur de $\partial\Omega_0$: la résultante est nulle. **21)** Les champs de contraintes sont compatibles si $\underline{\sigma}_{\text{fluide}}\underline{n} = \underline{\sigma}_{\text{élastique}}\underline{n}$ pour tous les points de la frontière $\partial\Omega_0$. Cette condition entraîne que $(3\lambda + 2\mu)\alpha = -p$ et $\mu_n \beta = \mu\phi t_*$. Le seul temps pour lequel l'égalité est vérifiée est donc $t_* = (\mu_n / \mu)(\beta / \phi) = \mu_n / [\mu(1 + \alpha^2)] = 10^{-11}$ s. **22)** La pression vaut alors $p_* = -(3\lambda + 2\mu)\alpha = 14 \cdot 10^6$ Pa. **23)** Les résultats précédents sont indépendants de la forme de \mathcal{D}_0 .

EXAMEN 1997

L'examen 1997 était constitué du problème "Écoulement de Couette cylindrique" conçu par Dominique Marro.

PROBLÈME 9.39

 Écoulement de Couette cylindrique

On rappelle tout d'abord quelques résultats de calcul différentiel en coordonnées cylindriques. Étant donné un champ scalaire $b(r, \theta, z)$, les composantes de son gradient en coordonnées cylindriques sont $\underline{\text{grad}} b = \frac{\partial b}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{db}{dz} \underline{e}_z$. Étant donné un champ de vecteurs $\underline{U}(r, \theta, z) = U_r \underline{e}_r + U_\theta \underline{e}_\theta + U_z \underline{e}_z$, les composantes en coordonnées cylindriques de son gradient sont

$$\underline{\text{grad}} \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) & \frac{dU_r}{dz} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) & \frac{dU_\theta}{dz} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{dU_z}{dz} \end{pmatrix}. \quad (9.32)$$

La divergence de \underline{U} est obtenue en prenant la trace du tenseur gradient. On rappelle que le laplacien d'un champ b s'exprime sous la forme $\Delta b = \underline{\text{div}} \underline{\text{grad}} b$.

Étant donné un champ de tenseurs *symétriques* d'ordre deux $\underline{A}(\underline{x})$, les composantes en coordonnées cylindriques de sa divergence $\underline{B} = \underline{\text{div}} \underline{A}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{rz}}{dz} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{\theta z}}{dz} + \frac{2 A_{r\theta}}{r} \\ B_z &= \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{dA_{zz}}{dz} + \frac{A_{zr}}{r}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Étude de l'écoulement

On considère deux cylindres circulaires infiniment longs, coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace annulaire est rempli d'un fluide *pesant* et *newtonien* incompressible de masse volumique ρ . L'axe Oz des cylindres

est vertical. Le mouvement du fluide ne résulte que de la rotation uniforme de chacun des cylindres : ω_1 pour le cylindre intérieur et ω_2 pour le cylindre extérieur. Le mouvement est supposé permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et de révolution ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$). De plus, on suppose que $U_z(r, z) = 0$. On peut montrer (T.D. de Mécanique des Fluides) que l'écoulement a pour solution : $U_r = U_z = 0$ et $U_\theta = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r}$ et $p(r, z) = p_0 - \rho g z + \rho \left(\frac{A^2 r^2}{8} + AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2} \right)$ avec $A = 2 \left(\omega_2 \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \omega_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right)$ et $B = (\omega_1 - \omega_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$. La constante de gravité est notée g .

- 1) Expliciter les équations du mouvement en coordonnées cylindriques ainsi que les conditions aux limites correspondant à cet écoulement.
- 2) Vérifier que la solution correspond bien au problème posé en détaillant les calculs.
- 3) Décrire l'ensemble des trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ et calculer l'accélération $\underline{\Gamma}(\underline{a}, t)$ en coordonnées cylindriques.
- 4) Calculer les tenseurs des taux de déformation et de rotation \underline{D} et $\underline{\Omega}$ en tout point (r, θ, z) . Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$? Expliquer.
- 5) Interpréter les composantes de \underline{D} (pour $\omega_1 \neq \omega_2$). Faire un dessin explicatif.

Étude des contraintes

On considère le sous-domaine \mathcal{D} constitué d'une portion de fluide comprise entre deux plans horizontaux distants d'une longueur verticale L .

- 6) Montrer que la pression $p(r, z)$ est une fonction croissante de r pour z fixé.
- 7) Calculer le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau}$ défini par $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$.
- 8) Calculer la résultante et le moment $\underline{M}_1(\mathcal{D})$ en $\underline{0}$ des forces extérieures exercées sur le domaine fluide \mathcal{D} par le cylindre intérieur. Même question pour le cylindre extérieur. Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?
- 9) Calculer la puissance $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ des efforts extérieurs exercés sur \mathcal{D} par le cylindre intérieur. Même question pour le cylindre extérieur.
- 10) Calculer les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur une section $z = \text{constante}$ orientée vers le haut puis vers le bas. En déduire que la puissance des forces extérieures exercées sur \mathcal{D} est $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D})$. Commenter le signe de cette puissance. Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

Étude thermodynamique

On suppose que les parois des cylindres sont adiabatiques (pas de flux de chaleur) et que la température est indépendante de z . À partir des résultats des questions précédentes, indiquer le signe de $\frac{d\mathcal{E}_{\text{int}}}{dt}$ où \mathcal{E}_{int} est l'énergie interne du cylindre par unité de longueur.

- 11) On suppose que $e = C_p T$. Que peut-on dire de l'évolution de la

température moyenne du cylindre au cours du temps ? Que se passe-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

On suppose que l'on utilise ce système comme coupleur hydraulique sur un treuil à moteur thermique. L'axe intérieur, de rayon $R_1 = 20$ cm tourne est entraîné par le moteur à la vitesse $\omega_1 = 3000$ tours/mn. Le tube cylindrique de longueur $L = 1$ m est rempli d'une huile de viscosité $\mu = .5$ Pa. Cette huile entraîne le cylindre extérieur de rayon $R_2 = 30$ cm à la vitesse angulaire ω_2 . Pour un régime donné, on constate que le moteur exerce un couple $M = 150$ Nm.

- 12) Calculer ω_2 .
- 13) Calculer $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$. En déduire la valeur $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D})$.
- 14) Définir un rendement caractéristique du système que l'on calculera. Commenter l'utilisation de ce principe dans les coupleurs hydrauliques existants.

Corrigé page 94

Corrigé

 Écoulement de Couette cylindrique

Étude de l'écoulement

1) Il faut écrire les équations de Navier Stokes incompressibles en coordonnées cylindriques à partir des informations fournies dans l'énoncé. L'équation de conservation de la masse $\text{div } \underline{U} = 0$ s'écrit en utilisant la relation $\text{div } \underline{U} = \text{tr}(\underline{\text{grad}} \underline{U})$. Le terme d'accélération de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'exprime en utilisant l'expression $\frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\underline{\text{grad}} \underline{U})\underline{U}$. Le terme le plus difficile à exprimer en coordonnées cylindriques est le terme de dissipation $\mu_n \Delta \underline{U}$. Une première méthode consiste à revenir à l'expression du tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau}(\underline{D}) = \lambda_n \text{tr}(\underline{D})\underline{I} + 2\mu_n \underline{D}$ où \underline{D} est la partie symétrique de $\underline{\text{grad}} \underline{U}$. Comme $\text{div } \underline{U} = 0$, cette expression se réduit à $\underline{\tau}(\underline{D}) = 2\mu_n \underline{D}$. Le terme de dissipation étant égal à $\underline{\text{div}} \underline{\tau}$, on voit donc que $\Delta \underline{U} = 2\underline{\text{div}} \underline{D}$ dans le cas où $\text{div } \underline{U} = 0$. L'expansion de cette expression se simplifie alors en utilisant l'expansion des relations $\frac{\partial}{\partial r}(\text{div } \underline{U}) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta}(\text{div } \underline{U}) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \underline{U}) = 0$. Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} &= 0 \\ \frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_n \Delta_r \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{r \rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu_n \Delta_\theta \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu_n \Delta_z, \end{aligned}$$

avec $\Delta \underline{U} = \Delta_r \underline{e}_r + \Delta_\theta \underline{e}_\theta + \Delta_z \underline{e}_z$,

$$\begin{aligned}\Delta_r &= \Delta U_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r}{r^2} \\ \Delta_\theta &= \Delta U_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2} \\ \Delta_z &= \Delta U_z.\end{aligned}\tag{9.34}$$

Le Laplacien scalaire s'écrit

$$\Delta b = \operatorname{div} \underline{\operatorname{grad}} b = \frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 b}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}.\tag{9.35}$$

Une autre manière d'exprimer $\Delta \underline{U}$ est de remarquer que $\Delta \underline{U} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{U}$ dans le cas particulier $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. L'expression en coordonnées cylindriques du rotationnel s'obtient en calculant la partie antisymétrique de la matrice gradient d'un champ de vecteur. Cette méthode est encore plus fastidieuse que la première. Les conditions aux limites de l'écoulement sont $U_r = U_z = 0$, $U_\theta = \omega_1 R_1$ pour $r = R_1$ et $U_r = U_z = 0$, $U_\theta = \omega_2 R_2$ pour $r = R_2$. **2)** Les seuls termes des équations qui ne sont pas nuls vérifient $-\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}$, $0 = \nu_n \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} \right)$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. On vérifie alors facilement que ces équations ainsi que les conditions aux limites sont satisfaites par les solutions analytiques de l'énoncé. **3)** Les trajectoires sont des cercles d'équations $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \theta_0 + U_\theta(r_0)t$ et $z = z_0$. L'accélération est donnée par $\Gamma_r = -U_\theta^2/r_0$, $\Gamma_\theta = \Gamma_z = 0$. **4)** Les seuls composantes non nulles sont $D_{rr} = D_{\theta\theta} = -B/r^2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{r^2} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ et $\Omega_{r\theta} = -\Omega_{\theta r} = -A/2 = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$. Dans le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ on a $\underline{D} = 0$ et $\Omega_{r\theta} = -\Omega_{\theta r} = \omega$: c'est un mouvement de rotation solide. **5)** Si $\omega_2 > \omega_1$ alors B est positif, U_θ croît avec r et $D_{r\theta} = -B/r^2 < 0$. L'angle de glissement $\gamma(t)$ entre \underline{e}_r et \underline{e}_θ décroît comme $\gamma(t) \sim -D_{r\theta}t/r^2$ au voisinage de $t = 0$. Un schéma permet de relier ce comportement avec le fait que $U_\theta(r)$ croît avec r .

Étude des contraintes

6) Comme $\frac{\partial r}{\partial r} = \rho_0 U_\theta^2/r > 0$ la fonction $p(r)$ est croissante. **7)** Les seules composantes non nulles sont $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -2\mu_n B/r^2$. **8)** Les forces extérieures par unité de surface exercées par les cylindres sur le fluide sont la somme des forces de pression $-p(R_1, z)\underline{e}_r$ et des forces visqueuses $-\underline{\tau}(R_1)\underline{e}_r = -2\mu_n B/R_1^2 \underline{e}_\theta = -2\mu_n \frac{\omega_2 - \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} R_2^2 \underline{e}_\theta$ pour le cylindre intérieur et $p(R_2, z)\underline{e}_r$ et $\underline{\tau}(R_2)\underline{e}_r = 2\mu_n B/R_2^2 \underline{e}_\theta = 2\mu_n \frac{\omega_2 - \omega_1}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 \underline{e}_\theta$ pour le cylindre extérieur. Si $\omega_2 > \omega_1$ le cylindre intérieur freine le fluide tandis que le cylindre extérieur l'accélère. Par symétrie, on voit que la résultante des ces forces par unité de surface est nulle lorsque l'on intègre sur une unité de longueur verticale. En ce qui concerne le moment en un point \underline{Q} situé sur l'axe, seules les forces visqueuses ont une contribution. Le moment exercé sur le sous-domaine \mathcal{D} par le cylindre intérieur est alors $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = -L \int_0^{2\pi} R_1 \underline{e}_r \wedge \underline{\tau}(R_1) \cdot \underline{e}_r R_1 d\theta = 4\pi\mu_n B \underline{e}^{(3)}$. Il est égal à $\underline{M}_2(\mathcal{D}) = L \int_0^{2\pi} R_2 \underline{e}_r \wedge \underline{\tau}(R_2) \cdot \underline{e}_r R_2 d\theta =$

$-4\pi\mu_n B\mathbf{e}^{(3)}$ pour le cylindre extérieur. On vérifie que la conservation du moment cinétique $\underline{M}_1(\mathcal{D}) + \underline{M}_2(\mathcal{D}) = \mathbf{0}$ est vérifiée. Dans le cas de la rotation solide $\omega_2 = \omega_1$ on a la relation $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = \underline{M}_2(\mathcal{D}) = \mathbf{0}$. **9**) Les puissances sont $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = L \int_0^{2\pi} \underline{T}(R_1)\omega_1\mathbf{e}_r R_1\mathbf{e}_\theta R_1 d\theta = 4\pi L\mu_n B\omega_1$ pour le cylindre intérieur et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = L \int_0^{2\pi} \underline{T}(R_2)\omega_2\mathbf{e}_r R_2\mathbf{e}_\theta R_2 d\theta = 4\pi L\mu_n B\omega_2$ pour le cylindre extérieur. On vérifie que $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = \underline{M}_1(\mathcal{D}) \cdot \omega_1\mathbf{e}_z$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = \underline{M}_2(\mathcal{D}) \cdot \omega_2\mathbf{e}_z$. **10**) Dans les cas $\underline{n} = \mathbf{e}^{(3)}$ (haut) et $\underline{n} = -\mathbf{e}^{(3)}$ (bas) on a $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = -p(r)\underline{n}$. Comme $\underline{U} \cdot \mathbf{e}^{(3)} = 0$ la puissance $L \int_{R_1 \leq r \leq R_2} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) \cdot \underline{U} dS$ est nulle. Comme la puissance des forces de gravité est elle aussi nulle, on a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = 4\pi L\mu_n \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 R_2^2 > 0$. On a $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = 0$ dans le cas $\omega_2 = \omega_1$.

Étude thermodynamique

11) Le premier principe $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \frac{d}{dt}\mathcal{K}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ s'écrit ici $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D})$. On a donc $\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{int}} > 0$. La température moyenne T_m , définie par $\rho_0 C_p T_m = \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) / [2\pi L(R_2^2 - R_1^2)]$ est donc croissante. Cet échauffement est dû à la dissipation visqueuse qui transforme l'énergie mécanique en chaleur. Dans le cas de la rotation solide il n'y a pas d'échauffement. **12**) Ici $\omega_1 > \omega_2$. En notant $\underline{M}_1(\mathcal{D}) = -\underline{M}_2(\mathcal{D}) = M\mathbf{e}^{(3)}$ on a $M = 4\pi\mu_n (\omega_1 - \omega_2)R_1^2 R_2^2 / (R_2^2 - R_1^2) = 150 \text{ Nm}$. Donc $\omega_2 = \omega_1 - \frac{M}{4\pi\mu_n} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2} = 16.82 \text{ s}^{-1}$ ce qui donne $\omega_2 = 1010$ tours/mn. **13**) Les puissances sont $\mathcal{P}_1(\mathcal{D}) = M\omega_1 = 7.5 \text{ kW}$ et $\mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = -M\omega_2 = 2.5 \text{ kW}$. On a donc $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathcal{D}) = \mathcal{P}_1(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{D}) = 5 \text{ kW}$. **14**) Le rendement est égale à la puissance $-\mathcal{P}_2(\mathcal{D})$ fournie par le fluide au cylindre extérieur divisée par la puissance $\mathcal{P}_1(\mathcal{D})$ fournie par cylindre intérieur au fluide, c'est-à-dire par le moteur. On obtient donc un rendement de un tiers. Les deux tiers de l'énergie mécanique fournie par le moteur sont dissipés sous forme de chaleur. Le rendement de ce coupleur mécanique est faible.