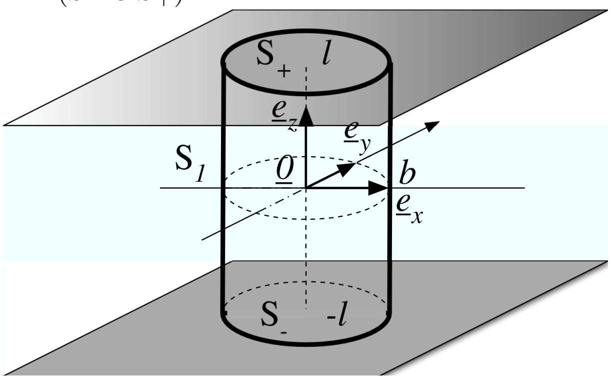
EXAMEN 2005

PROBLÈME 0.1 Cylindre thermoélastique

On note $(\underline{0}, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ le repère orthonormé canonique et (x, y, z) les coordonnées d'un point $\underline{x}$. On considère une pastille d'oxyde d'uranium dont la forme Ω est le cylindre d'axe Oz, de longueur $2\,l$ et dont la section est un cercle de rayon b. On choisit l'origine des axes au centre du cylindre (voir figure). On note S_- et S_+ les disques de rayon b et de cotes respectives $z = \pm l$ et S_1 la face $\partial\Omega - (S_- \cup S_+)$.



Équilibre thermique

Les faces S_- et S_+ de la pastille sont en contact avec un matériau conducteur de chaleur et le dispositif est placé dans un réacteur nucléaire, ce qui provoque l'échauffement de la pastille avec un taux de production volumique de chaleur $r(\underline{x})$. On suppose que l'équilibre est atteint et que le champ de température dans la pastille s'écrit $T(\underline{x}) = T_0 + \tau_0 - \frac{A}{2} z^2$ où T_0, τ_0 et A sont des constantes. On note k le coefficient de diffusivité thermique de la pièce supposée obéir à la loi de Fourier.

1) Calculer le flux de chaleur qui sort de la face S_+.
2) Comparer ce flux avec celui qui sort de la face S_-.
3) Calculer le flux de chaleur qui sort de la face S_1.
4) Écrire l'équation de bilan de l'énergie interne dans la pastille.
5) En déduire le taux de production volumique de chaleur $r(\underline{x})$.
6) Calculer la puissance fournie à la pastille par la réaction nucléaire.
7) Comparer avec le flux de chaleur sortant à travers $\partial\Omega$.

Comportement thermoélastique

On suppose que, pour la température uniforme T_0, la pastille occupe la configuration de référence Ω_0 qui est un cylindre de hauteur $2l$ et de section circulaire de rayon b_0. On se place dans le cadre des petites perturbations, ce qui permet de confondre les configurations déformées Ω avec la configuration de référence Ω_0. On suppose que le matériau obéit à la loi de comportement thermoélastique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\operatorname{div} \underline{\xi})\, \underline{\underline{I}} + 2\,\mu\, \underline{\underline{\epsilon}} - \kappa(T - T_0)\, \underline{\underline{I}} \qquad (1)$$

où $\underline{\xi}$ est le champ de déplacement, $\underline{\underline{\epsilon}}$ le tenseur des petites déformations, T le champ de température et κ un coefficient caractérisant la dilation thermique du matériau.

8) On néglige les forces de gravité. Écrire les équations d'équilibre obtenues avec cette loi de comportement.
9) On suppose que les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega_0$ s'écrivent $\underline{\xi} \cdot \underline{n} = 0$ et $\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n})\, \underline{n} = \underline{0}$ lorsque $\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} < 0$ et $\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} = \underline{0}$ sinon. Décrire brièvement le montage mécanique modélisé par ces conditions aux limites.
10) On cherche une solution de la forme $\underline{\xi} = W(z^3 - l^2\, z)\, \underline{e}_z$. Calculer W pour que ce champ de déplacement soit solution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.
11) Calculer le champ $\underline{T}(\underline{x})$ des forces de surface exercées sur la surface S_+.
12) En déduire une condition sur τ_0 pour que $\underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{n} < 0$ sur S_+ et S_-.
13) Calculer le champ $\underline{T}(\underline{x})$ des forces de surface exercées sur la surface S_1.
14) Montrer que $\underline{\xi}$ est solution du problème thermoélastique si et seulement si $\tau_0 > \tau_c$ où τ_c est une constante que l'on précisera.
15) Donner des arguments permettant d'expliquer la forme en "tonneau" que prend la pastille lorsque τ_0 est légérement inférieur à τ_c.

Corrigé page 6

PROBLÈME 0.2 Tenseur des contraintes visqueuses nul

On considère un fluide newtonien dont la loi de comportement est $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{D}}) = -p\, \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$, où $p(\underline{x}, t)$ est le champ de pression et $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \lambda_n\, (\operatorname{div} \underline{U})\, \underline{\underline{I}} + 2\, \mu_n\, \underline{\underline{D}}$ le champ de tenseurs des contraintes visqueuses. On cherche à caractériser les écoulements pour lesquels $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{0}}$. On considère le repère orthonormé direct $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, une origine $\underline{0}$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'espace.

Écoulements à taux de déformation nuls

1) On considère l'écoulement $\underline{U}(\underline{x}) = U(z)\, \underline{e}_x$. Décrire la famille des profils $U(z)$ pour lesquels $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$.

2) Décrire l'ensemble des champs $\underline{U}(\underline{x})$ dont le gradient $\underline{\underline{K}}(\underline{x})$ est nul.
3) On considère l'écoulement $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + \underline{\omega}^{(0)} \wedge \underline{x}$ où $\underline{U}^{(0)}$ et $\underline{\omega}^{(0)}$ sont des vecteurs constants. Montrer que tenseur des taux de rotation associé est un tenseur constant $\underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ et donner la valeur de $\underline{\underline{D}}$.
4) On considère un champ de vitesse quelconque $\underline{U}(\underline{x})$. Écrire les conditions satisfaites par les dérivées $\frac{\partial U_i}{\partial x_n}$ lorsque le tenseur des taux de déformation associé $\underline{\underline{D}}(\underline{x})$ est nul.
5) En déduire la valeur de $\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_n}$ où les Ω_{ij} sont les composantes du tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x})$.
6) Décrire l'ensemble des champs de vitesse $\underline{U}(\underline{x})$ dont le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ est nul.

Hypothèse de Stokes

On note T l'ensemble des tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{A}}$, T_s le sous-ensemble des tenseurs sphériques qui s'écrivent $\underline{\underline{A}} = s\,\underline{\underline{I}}$ et T_d le sous-ensemble des tenseurs déviatoriques qui vérifient tr $(\underline{\underline{A}}) = 0$.

7) Montrer que l'on peut décomposer tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ en une somme $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{(\text{sph})} + \underline{\underline{A}}^{(\text{dev})}$ avec $\underline{\underline{A}}^{(\text{sph})} \in T_s$ et $\underline{\underline{A}}^{(\text{dev})} \in T_d$. Exprimer $\underline{\underline{A}}^{(\text{sph})}$ et $\underline{\underline{A}}^{(\text{dev})}$ en fonction de $\underline{\underline{A}}$.
8) Montrer que T_s et T_d sont des espaces vectoriels de T et que l'on a $T = T_s \oplus T_d$.
9) On suppose que pour tout $\underline{\underline{D}} \in T_s$, le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$ est nul. En déduire une relation entre λ_n et μ_n.

Écoulement à taux de déformations sphériques

On suppose que le tenseur $\underline{\underline{D}}(\underline{x})$ associé au champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x})$ est de la forme $\underline{\underline{D}}(\underline{x}) = s(\underline{x})\,\underline{\underline{I}}$ où $s(\underline{x})$ est un champ a priori quelconque.

10) On considére un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement autour d'une trajectoire $\underline{x}(t)$. Comparer la forme de $\delta\mathcal{V}(t)$ et celle de $\delta\mathcal{V}(t+dt)$ lorsque dt est petit.
11) Écrire les relations vérifiées par les quantités $\frac{\partial U_i}{\partial x_n}$ pour $i \neq n$.
12) En déduire que $\underline{\underline{\Omega}}$ est un tenseur constant que l'on notera $\underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$.
13) Montrer que le gradient du nouveau champ de vitesse défini par $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x}) - \underline{\underline{\Omega}}^{(0)}\,\underline{x}$ est un tenseur sphérique.
14) En déduire la valeur de certaines dérivées $\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_j}$.
15) Montrer que si $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}) = U(x)\underline{e}_x + V(y)\underline{e}_y + W(z)\underline{e}_z$ avec $\underline{\underline{\widetilde{D}}}(\underline{x}) = s(\underline{x})\,\underline{\underline{I}}$, alors $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + s^{(0)}\,\underline{x}$ où $s^{(0)}$ est une constante et $\underline{U}^{(0)}$ un vecteur vitesse constant.

16) En déduire l'ensemble de tous les champs de vitesses $\underline{U}(\underline{x})$ tels que $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{0}}$, en supposant que $\lambda_n = -\frac{2}{3}\,\mu_n$. Montrer que c'est un espace vectoriel et indiquer sa dimension.

Corrigé page 6

EXERCICE 0.3 Écoulements radiaux

On considère le repère orthonormé direct $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, une origine $\underline{0}$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'espace. On définit $\underline{e}_r(\underline{x}) = \underline{x}/\|\underline{x}\|$ le vecteur unitaire défini partout sauf en $\underline{0}$ et $R(\underline{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dans ce problème, on note $F(r)$ une fonction, $B(\underline{x})$ un champ scalaire et $\underline{V}(\underline{x})$ un champ vectoriel quelconques.

1) Choisir la bonne expression de chacun des champs de la colonne de gauche du tableau 1.

	(a) : =	(b) : =	(c) : =
$\underline{\text{grad}}\ \underline{x}^2$	$2\underline{x}$	$\underline{x}$	$\underline{x} \otimes \underline{x}$
$\underline{\text{grad}}\ [F(B)]$	$F'(B) + \underline{\text{grad}}\ B$	$F'(B)\,\underline{\text{grad}}\ B$	$F'(B) \otimes \underline{\text{grad}}\ B$
$\underline{\text{grad}}\ B^n$	$n\,B^{n-1}\,\underline{\text{grad}}\ B$	$(n-1)\,B^n\,\underline{\text{grad}}\ B$	$(n-1)\,\underline{x} \otimes \underline{\text{grad}}\ B^{n-1}$
$\underline{\text{grad}}\ (R^{2n})$	$2\,n\,R^{2(n-1)}\,\underline{e}_r$	$2\,n\,R^{2(n-1)}\,\underline{x}$	$2\,n\,R^{2n-1}\,\underline{x}$
$\underline{\text{grad}}\ R$	$\underline{e}_r$	$R^{-2}\,\underline{e}_x$	$\underline{x}$

Table 1: Calcul du gradient de cinq champs scalaires

2) Choisir la bonne expression pour chacun des champs de la colonne de gauche du tableau 2.

	(a) : =	(b) : =	(c) : =
$\underline{\underline{\text{grad}}}\ (\underline{x})$	$\underline{\underline{I}}$	$3\,\underline{\underline{I}}$	$\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$
$\underline{\underline{\text{grad}}}\ (B\,\underline{V})$	$\underline{\text{grad}}\ B \otimes \underline{V}$ $+B\,\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V}$	$\underline{V} \otimes \underline{\text{grad}}\ B$ $+B\,\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V}$	$B\,\underline{\underline{\text{grad}}}\ \underline{V}$
$\underline{\underline{\text{grad}}}\ (R^n\,\underline{x})$	$n\,R^n\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + R^n\,\underline{\underline{I}}$	$nR^n\,\underline{x} \otimes \underline{x} + R^n\,\underline{\underline{I}}$	$nR^n\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$
$\underline{\underline{\text{grad}}}\ (\underline{e}_r)$	$\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$	$\frac{1}{R}\underline{\underline{I}} + \frac{1}{R^3}\underline{x} \otimes \underline{x}$	$\frac{1}{R}(\underline{\underline{I}} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$
$\underline{\underline{\text{grad}}}\ [F(R)\,\underline{e}_r]$	$F'(R)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ $+\frac{F(R)}{R}(\underline{\underline{I}} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$	$F'(R)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$ $+\frac{F(R)}{R}(\underline{\underline{I}} + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$	$F'(R)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r$

Table 2: Calcul du gradient de cinq champs de vecteurs

3) On considère l'écoulement défini par $\underline{U}(\underline{x}) = F\,[R(\underline{x})]\ \underline{e}_r(\underline{x})$ pour $\underline{x}$ non nul et $\underline{U}(\underline{0}) = \underline{0}$. On suppose que $F(0) = 0$. Décrire la famille des profils $F(r)$ pour laquelle $\underline{\underline{D}}(\underline{x}) = s[R(\underline{x})]\ \underline{\underline{I}}$.

Corrigé page 7

Corrigé 0.1 Cylindre thermoélastique

Équilibre thermique

1)Le vecteur flux de chaleur est $\underline{Q} = -k\,\underline{\text{grad}}\ T = k\,A\,z\,\underline{e}_z$. Il sort de S_+ le flux de chaleur $\mathcal{Q}_+ = \iint_{S_+} \underline{Q}\cdot\underline{e}_z\,dS = \pi\ b^2 l\ kA$. **2)**Il sort de S_- le même flux de chaleur $\mathcal{Q}_+ = \mathcal{Q}_-$. **3)**Il sort de S_1 le flux nul $\mathcal{Q}_1 = 0$, car $\underline{Q}\cdot\underline{e}_r = 0$ pour toute normale horizontale $\underline{e}_r$. **4)**Le bilan d'énergie interne s'écrit $0 = r - \text{div}\ \underline{Q} = r + k\,\Delta T = r - kA$. **5)**On a donc $r = kA$ qui est constant. **6)**La réaction nucléaire fourni la puissance $\mathcal{P} = \iiint_\Omega r\ d^3x = 2\pi\,b^2 l\,r = 2\pi\,b^2 l\,kA$. **7)**On vérifie que l'on a bien $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_+ + \mathcal{Q}_- + \mathcal{Q}_1$. La puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{the}}(\Omega) = \iiint_\Omega r\ d^3x - \iint_{\partial\Omega} \underline{Q}\cdot\underline{n}\,dS = 0$ est bien nulle car on est à l'équilibre.

Comportement thermoélastique

8)Les équations d'équilibre s'écrivent $\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda+\mu)\underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{\xi}) + \mu\,\Delta\underline{\xi} - \kappa\,\underline{\text{grad}}\ T = \underline{0}$. **9)**La pastille est confinée dans un domaine indéformable qui occupe le volume Ω_0. Les configurations déformées doivent vérifier $\Omega \subset \Omega_0$. Les parties de $\partial\Omega$ qui ne sont pas en contact avec l'enceinte sont libres de contraintes ($\underline{T} = \underline{0}$). En cas de contact, le déplacement normal est nul et les contraintes tangentielles sont nulles. Il s'agit d'un contact unilatéral avec glissement. **10)**On a $\text{div}\ \underline{\xi} = W(3\,z^2 - l^2)$. L'équation d'équilibre s'écrit $[6W(\lambda+\mu) + 6W\mu + \kappa\,A]\,\underline{e}_z = \underline{0}$. On en déduit que $W = -\frac{\kappa A}{6(\lambda+2\mu)}$. **11)**On a $\underline{\underline{\sigma}} = W(3\,z^2 - l^2)(\lambda\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z) - \kappa\left(\tau_0 - \frac{A}{2}z^2\right)\underline{\underline{I}}$. Sur la face S_+, d'équation $z = l$, on peut donc écrire $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_z = 2(\lambda + 2\mu)Wl^2\,\underline{e}_z - \kappa\left(\tau_0 - \frac{A}{2}l^2\right)\underline{e}_z$. En remplaçant W par sa valeur, on obtient $\underline{T} = -\kappa\left(\tau_0 - \frac{A}{2}l^2 + \frac{A}{3}l^2\right)\underline{e}_z = -\kappa\left(\tau_0 - \frac{Al^2}{6}\right)\underline{e}_z$. **12)**Pour $\tau_0 > \frac{Al^2}{6}$, on a $\underline{T}\cdot\underline{n} < 0$ sur S_+. Par symétrie, le contact est également effectif sur S_-. **13)**Étant donnée une normale horizontale $\underline{e}_r$, on peut écrire $\underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_r = \lambda W(3z^2 - l^2)\underline{e}_r - \kappa\left(\tau_0 - \frac{A}{2}z^2\right)\underline{e}_r$. En remplaçant W par sa valeur et après quelques manipulations, on obtient $\underline{T} = -\kappa\left(\tau_0 - A\frac{6\mu z^2 + \lambda l^2}{6(\lambda+2\mu)}\right)\underline{e}_r$. **14)**Sur S_1, le maximum de la fonction $6\mu z^2 + \lambda l^2$ est atteint pour $|z| = l$ et vaut $(6\mu+\lambda)l^2$. Pour $\tau > \tau_c$ avec $\tau_c = \sup\left(\frac{Al^2}{6}, \frac{\lambda+6\mu}{\lambda+2\mu}\frac{Al^2}{6}\right)$, on a $\underline{T}\cdot\underline{n} < 0$ sur toutes les faces. Le champ de déplacement considéré est donc solution du problème. **15)**Pour $\tau_0 < \tau_c$, le contact sera d'abord perdu sur la face S_1 au voisinage des extrêmités $|z| = l$ alors que la partie centrale reste en contact avec l'enceinte. La pastille prend donc la forme d'un tonneau.

Corrigé 0.2 Tenseur des contraintes visqueuses nul

Écoulements à taux de déformation nuls

1)Comme $D_{13} = U'(z) = 0$, on a $\underline{U}(\underline{x}) = U^{(0)}\underline{e}_x$ où $U^{(0)}$ est une constante. **2)**Comme $\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0$, on a $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)}$ où $\underline{U}^{(0)}$ est un vecteur constant. **3)**On a

$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + \underline{\underline{\Omega}}^{(0)}\,\underline{x}$ où $\underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ est le tenseur antisymétrique de vecteur rotation $\underline{\omega}^{(0)}$. On a donc $\underline{\underline{D}}(\underline{x}) = \underline{\underline{0}}$. **4)**Si $D_{in} = 0$, on a $\frac{\partial U_i}{\partial x_n} = -\frac{\partial U_n}{\partial x_i}$. **5)**On a $2\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_n} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_n \partial x_j} - \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_n \partial x_i} = -\frac{\partial^2 U_n}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_j \partial x_i} = 0$. **6)**On en déduit que $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ est un tenseur constant.

Hypothèse de Stokes

7)On a $\underline{\underline{A}}^{(\mathrm{sph})} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}})\,\underline{\underline{I}}$ qui est bien sphérique et $\underline{\underline{A}}^{(\mathrm{dev})} = \underline{\underline{A}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}})\,\underline{\underline{I}}$ dont la trace est bien nulle. **8)**Ces expressions montrent que la décomposition est unique. **9)**Comme $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$ dépend linéairement de $\underline{\underline{D}}$, on a donc $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{I}}) = (3\lambda_n + 2\mu_n)\,\underline{\underline{I}}$, ce qui entraîne l'hypothèse de Stokes $\lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n$.

Écoulement à taux de déformations sphériques

10) Le volume $\delta\mathcal{V}(t+dt)$ a la même forme que $\delta\mathcal{V}(t)$ et a subi dilatation d'un facteur $[1 + s[\underline{x}(t)\,dt]$. **11)**Comme $D_{in} = 0$ pour $i \neq n$, on a $\frac{\partial U_i}{\partial x_n} = \frac{\partial U_n}{\partial x_i}$. **12)**On en déduit que $\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_n} = 0$ pour $i \neq j$ et donc que $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ est un tenseur constant. **13)**Si $\underline{\underline{K}}(\underline{x})$ est le gradient de $\underline{U}(\underline{x})$, le gradient du nouveau champ est $\underline{\underline{K}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\Omega}}^{(0)} = \underline{\underline{D}}(\underline{x}) = s(\underline{x})\,\underline{\underline{I}}$. **14)**Le gradient de $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x}) - \underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ étant diagonal, on a $\frac{\partial \widetilde{U}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \widetilde{U}_1}{\partial x_3} = 0$, ce qui impose que $\widetilde{U}_1(x,y,z) = U(x)$. On démontre de même que $\widetilde{U}_2(x,y,z) = V(y)$ et $\widetilde{U}_3(x,y,z) = W(z)$. **15)**Comme $D_{11} = D_{22} = D_{33} = s(\underline{x})$, on a $U'(x) = V'(y) = W'(z) = s(x,y,z)$. On en déduit que $s(\underline{x}) = s^{(0)}$ est une constante et donc que $U(x) = U^{(0)} + s^{(0)}\,x$, $V(y) = V^{(0)} + s^{(0)}\,y$ et $W(z) = W^{(0)} + s^{(0)}\,z$. **16)**La relation $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{0}}$ s'écrit $\underline{\underline{D}} = -\frac{\lambda_n}{2\mu_n}\,\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{D}})\,\underline{\underline{I}}$. Pour $\lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n$, on a $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{D}})\,\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{D}}^{(sph)}$. On pose $s(\underline{x}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{D}})$ de manière à écrire $\underline{\underline{D}}(\underline{x}) = s(\underline{x})\,\underline{\underline{I}}$. D'après la question 13, les champs de vitesse $\underline{U}$ qui admettent un tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}) = s(\underline{x})\,\underline{\underline{I}}$ sphérique ont un tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}^{(0)}$ constant. La question 14 montre que l'on a $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}) = U(x)\underline{e}_x + V(y)\underline{e}_y + W(z)\underline{e}_z$. La question 15 montre que l'on a $\underline{\widetilde{U}}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + s^{(0)}\,\underline{x}$. En conclusion, les champs de vitesse qui annulent $\underline{\underline{\tau}}$, sous l'hypothèse de Stokes, sont de la forme $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{(0)} + \underline{\omega}^{(0)} \wedge \underline{x} + s^{(0)}\,\underline{x}$ où $\underline{U}^{(0)}$, $\underline{\omega}^{(0)}$ et $s^{(0)}$ sont constants. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 7.

Corrigé 0.3 Écoulements radiaux

1) ababa : a) $\underline{\mathrm{grad}}\ \underline{x}^2 = 2\,\underline{x}$, b) $\underline{\mathrm{grad}}\ [F(B)] = F'(B)\,\underline{\mathrm{grad}}\ B$, a) $\underline{\mathrm{grad}}\ B^n = n\,B^{n-1}\,\underline{\mathrm{grad}}\ B$ en posant $F(B) = B^n$, b) $\underline{\mathrm{grad}}\ \left(R^{2n}\right) = 2\,n\,R^{2(n-1)}\,\underline{x}$ en posant $B(\underline{x}) = R(\underline{x})$ et a) $\underline{\mathrm{grad}}\ R = \underline{e}_r$ en posant $n = \frac{1}{2}$. **2)abaca :** a) $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ (\underline{x}) = \underline{\underline{I}}$, b) $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ (B\ \underline{V}) = \underline{V} \otimes \underline{\mathrm{grad}}\ B + B\,\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ \underline{V}$ car $\frac{\partial (B\,V_i)}{\partial x_j} = B\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B}{\partial x_j}V_i$, a) $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ (R^n\,\underline{x}) = n\,R^n\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + R^n\,\underline{\underline{I}}$ en posant $B(\underline{x}) = R^n(\underline{x})$, c) $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ (\underline{e}_r) = \frac{1}{R}(\underline{\underline{I}} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$ en posant $n = -1$ et a) $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ [F(R)\,\underline{e}_r] = F'(R)\,\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{F(R)}{R}(\underline{\underline{I}} - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r)$ en posant $\underline{e}_r = \underline{V}$.