EXAMEN 2006

PROBLÈME 0.1 Écoulements de Poiseuille - Couette

On considère un écoulement fluide compris entre deux plans d'équations $z = -l$ et $z = l$ dans le repère orthonormé $\{\underline{e}_x,\ \underline{e}_y,\ \underline{e}_z\}$.

On suppose que la loi de comportement rhéologique du milieu est celle d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique homogène ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n. On note $\underline{U}(\underline{x}, t)$ le champ de vitesse et $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression. On note $\underline{g} = -g\,\underline{e}_z$ le champ de gravité.

On suppose que la plaque du bas, en $z = -l$, est immobile, et que la plaque du haut, en $z = l$, est animée d'une vitesse uniforme $U_0\,\underline{e}_x$.

1) Écrire les conditions aux limites pour la vitesse en $z = \pm l$.
2) Écrire les équations du mouvement.

Détermination des profils

On cherche des solutions stationnaires telles que $\underline{U}(\underline{x}, t) = U(z)\,\underline{e}_x$. On suppose que $p(0, 0, 0) = P_0$ et $p(L, 0, 0) = P_L$, les pressions en $\underline{x} = \underline{0}$ et $\underline{x} = L\,\underline{e}_x$ sont des constantes connues. On suppose que $P_L \leq P_0$.

3) Écrire les équations du mouvement que doivent vérifier ces solutions particulières.
4) Montrer d'abord que la pression est de la forme $p = C\,z + G(x)$ où C est une constante que l'on précisera.
5) Montrer que $G'(x) = -B$ et que p est de la forme $p = A - B\,x + C\,z$ où A et B sont des constantes que l'on précisera.
6) Montrer que $U(z)$ est solution d'une équation différentielle ordinaire avec deux conditions aux limites que l'on précisera. On pourra noter $\beta = (P_0 - P_L)/(2\,\rho_0\,\nu_n\,L)$.
7) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_0 = 0$ (écoulement de Poiseuille).
8) Calculer $U(z)$ dans le cas où $U_0 \neq 0$ et $P_L = P_0$ (écoulement de Couette).
9) Calculer $U(z)$ dans le cas général $U_0 \neq 0$ et $P_L \neq P_0$. Comparer avec les profils des deux questions précédentes et commenter.

Corrigé page 3

PROBLÈME 0.2 Étude de l'écoulement de Poiseuille

On considère un écoulement de Poiseuille défini par sa représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t) = \beta\ (l^2 - x_3^2)\ \underline{e}^{(1)}$ du champ de vitesse dans le repère orthonormé

$\left\{\underline{e}^{(1)},\ \underline{e}^{(2)},\ \underline{e}^{(3)}\right\}$. On choisit pour ce mouvement la configuration de référence $\Omega_0 = \Omega(0)$ occupant le cube $\|\underline{a}\| \leq l$ à l'instant $t = 0$.

Étude locale du mouvement

On considère la trajectoire $\underline{x}(t)$ définie par $\underline{x}(t_*) = \underline{x}_*$. Dans un premier temps, on choisit $\underline{x}_* = -l\ \underline{e}^{(3)}$ et on considère la trajectoire $\underline{x}'(t)$ définie par $\underline{x}'(t_*) = \underline{x}_* + \delta l\ \underline{e}^{(3)}$ avec $0 < \delta l < l$. On note $\underline{\delta x}(t)$ le vecteur défini par $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$. On note $\delta x(t)$ sa norme et $\theta(t)$ l'angle qu'il fait avec l'axe Ox_1.

1) Dessiner la trajectoire $\underline{x}(t)$ et le vecteur $\underline{\delta x}(t)$ à des instants successifs $t \geq t_*$.
2) Pour δl fixé, calculer $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ pour tout temps et indiquer le sens de variation de ces fonctions du temps.
3) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en $(t - t_*) \ll 1$ de $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ au voisinage de $t = t_*$ pour δl fixé.
4) Calculer le développement limité à l'ordre 1 en $\delta l \ll 1$ de $\delta x(t)/\delta l$ et $\gamma(t) = \pi/2 - \theta(t)$ au voisinage de $\delta l = 0$ pour $t \geq t_*$ fixé.
5) Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$. Relier les valeurs des composantes D_{33} et D_{13} aux résultats des questions 3 et 4.
6) Calculer le tenseur des taux de rotation $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}_*, t_*)$ et le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*)$. Interpréter le résulat.
7) Déterminer la base de diagonalisation de $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$ et interpréter ses composantes dans cette base.
8) On suppose à présent que $\underline{x}_* = \underline{0}$. Reprendre les sept questions précédentes pour ce nouveau choix de $\underline{x}_*$.
9) Comparer les résultats obtenus pour $\underline{x}_* = \underline{0}$ et $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$.

Corrigé page 3

$\boxed{\text{PROBLÈME 0.3}}$ Calculs énergétiques de Couette

On considère le champ de pression $P(z) = P_0 - \rho_0 g z$ et le champ de vitesse $U(z) = a\,z + b$ d'un fluide incompressible de masse volumique ρ_0 et de viscosité cinématique ν_n.

1) On suppose que $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_0$. En déduire a et b.
2) Calculer la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ excercés dans le domaine $\mathcal{D} = \left\{\underline{x} = (x, y, z) \in I\!R^3 \text{ tq } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq D \text{ et } |z| \leq l\right\}$
3) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$ des efforts de contact extérieurs à $\mathcal{D}$.
4) Comparer les puissances $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$. Commenter.

Corrigé page 4

Corrigé Écoulements de Poiseuille - Couette

1)Les conditions aux limites s'écrivent $\underline{U}(x, y, -l) = \underline{0}$ et $\underline{U}(x, y, l) = \underline{U}_0\ \underline{e}_x$ pour tout couple (x, y). **2)**Les équations du mouvement s'écrivent div $\underline{U} = 0$ et $\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\underline{\text{grad}}\ p + \nu_n\, \Delta\underline{U}$.

Détermination des profils

3)On a trivialement div $\underline{U} = 0$. Le profil $U(z)$ vérifie $0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_n\, U''(z)$. Les autres équations s'écrivent $0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g$. **4)**En intégrant les deux dernière équations on obtient $p = -\rho_0\, g\, z + G(x)$. On a donc $C = -\rho_0\, g$. **5)**En reportant dans la première, on obtient $0 = -\frac{1}{\rho_0}G'(x) + \nu_n\, U''(z)$. On en déduit que $G'(x)$ est une constante que l'on note $-B$. On a donc $p = A - B\, x - \rho_0\, g\, z$. Les valeurs de P en $x = 0$ et $x = L$ sur le plan central entraînent $A = P_0$ et $B = \frac{P_0 - P_L}{L}$. **6)**On en déduit que $-\frac{P_0 - P_L}{\rho_0\, L} = \nu_n\, U''(z)$ et donc $U''(z) = -\beta/2$ avec les conditions aux limites $U(-l) = 0$ et $U(l) = U_0$. **7)**Dans le cas $U_0 = 0$, la solution est $U(z) = \beta(l^2 - z^2)$. **8)**Dans le cas $P_L = P_0$, on a $\beta = 0$ et donc $U(z) = U_0\,(z + l)/(2\, l)$. **9)**Dans le cas général, on a $U(z) = \beta(l^2 - z^2) + U_0\,(z + l)/(2\, l)$. C'est la somme des deux profils précédent. Cela résulte du fait que l'équation du second dégré et les conditions aux limites constituent un problème linéaire.

Corrigé Étude de l'écoulement de Poiseuille

Étude locale du mouvement

1) Pour $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$, la trajectoire $x(t)$ est un point (adhérence à une paroi). Le vecteur $\underline{\delta x}(t)$ fait un angle $\theta(t_*) = \pi/2$ qui décroît vers 0 avec le temps. Son extrémité reste sur une trajectoire rectiligne. **2)** $\delta x(t) = \delta l\sqrt{1 + \beta^2(2l - \delta l)^2(t - t_*)^2}$ et $\theta(t) = \pi/2 - \text{arctg}[\beta(2l - \delta l)(t - t_*)]$. La fonction $\delta x(t)$ est croissante, sa pente en $t = t_*$ est nulle et tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. $\theta(t)$ est décroissante de $\pi/2$ à 0. **3)** $\delta x(t) = \delta l + O[(t - t_*)^2]$. On a $\theta(t) = \pi/2 - \beta(2l - \delta l)(t - t_*) + O[(t - t_*)^2]$. **4)** $\delta x(t)/\delta l = \sqrt{1 + (2\beta l)^2(t - t_*)^2} + O(\delta l^2)$. On a $\gamma(t) = \text{arctg}[2\beta l(t - t_*)] + O(\delta l^2)$. **5)** Seuls $D_{13}(\underline{x}_*, t_*) = D_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$ sont non nuls. Au voisinage des points immobiles $a_3 = -l$ et de $t = t_*$, les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement. L'angle de glissement du couple $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(3)})$ croît avec une pente $2\beta l$ au voisinage de $t = t_*$. En utilisant $\frac{1}{\delta x}\frac{d\delta x}{dt}|_{t_*} = D_{33}(\underline{x}_*, t_*)$ on voit que la nullité de D_{33} traduit la nullité de la pente de la fonction $\delta x(t)$ au voisinage de $t = t_*$. Ce résultat est aussi visible dans le développement limité en t de $\delta x(t)$. En utilisant $\frac{d}{dt}\gamma(t_*) = 2D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$ on voit que la valeur de $D_{13}(\underline{x}_*, t_*)$ se retrouve dans le développement limité en t de $\gamma(t)$. **6)** Seuls $\Omega_{13}(\underline{x}_*, t_*) = -\Omega_{31}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l$ sont nuls. On a donc $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*) = \beta l\underline{e}^{(2)}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$ le taux de rotation égal à βl en valeur absolue et dans le sens trigonométrique inverse du plan Ox_1x_3. **7)** La base de diagonalisation de $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*)$ est engendrée par les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)}+\underline{e}^{(3)})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)}-\underline{e}^{(3)})$ et $\underline{e}^{(2)}$. Le taux de dilatation dans la direction $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}^{(1)}\pm\underline{e}^{(3)})$ est $\pm\beta l$. **8)** Pour $\underline{x}_* = \underline{0}$ la trajectoire $x(t)$ est rectiligne. Le vecteur $\underline{\delta x}(t)$ fait un angle $\theta(t_*) = \pi/2$ qui croît vers π avec le temps. Son extremité reste sur une trajectoire rectiligne. $\delta x(t) = \delta l\sqrt{1+\beta^2(t-t_*)^2\delta l^2}$ et $\theta(t) = \pi/2 + \mathrm{arctg}[\beta(t-t_*)\delta l]$. La fonction $\delta x(t)$ est croissante, sa pente en $t = t_*$ est nulle et tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. La fonction $\theta(t)$ est croissante de $\pi/2$ à π. Le développement limité en temps est $\delta x(t) = \delta l + O[(t-t_*)^2]$. On a $\theta(t) = \pi/2 + \beta(t-t_*)\delta l + O[(t-t_*)^2]$. Le développement limité en δl est $\delta x(t)/\delta l = 1 + O(\delta l^2)$. On a $\gamma(t) = -\beta(t-t_*)\delta l + O(\delta l^2)$. On a $\underline{\underline{D}}(\underline{x}_*, t_*) = 0$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$, et les longueurs des petits vecteurs (infinitésimaux) restent inchangées dans le mouvement et les angles de glissements des couples de vecteurs orthogonaux sont nuls. Ceci est conforme avec le fait que l'ordre 1 du développement limité en δl de $\delta x(t)$ et $\theta(t)$ est sont respectivement 1 et 0. On a $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\omega}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{0}$. Au voisinage des trajectoires $a_3 = 0$ le taux de rotation est nul. Toutes les bases diagonalisent la matrice nulle $\underline{\underline{D}}$. **9)** Le point $\underline{x}_* = \underline{0}$ correspond à un extremum du profil de vitesse alors que le point $\underline{x}_* = -l\underline{e}^{(3)}$ est représentatif d'un point quelconque. Au voisinage d'un extremum de vitesse il n'y a pas de déformation ($\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$) ni rotation ($\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$) à l'ordre 1.

Tenseur des dilatations

10) Seuls $C_{11} = C_{22} = 1$, $C_{13} = C_{31} = -2\beta a_3 t$ et $C_{33} = 1 + 4\beta^2 a_3^2 t$ sont non nuls. **11)** On a $\underline{\underline{C}}(\underline{0}, t) = \underline{\underline{I}}$. Les longueurs et les angles des petits voisinages des trajectoires $a_3 = 0$ sont conservés dans le mouvement.

$\boxed{\text{Corrigé}}$ Calculs énergétiques de Couette

1)En résolvant $al + b = U_0$ et $-al + b = 0$, on obtient $a = \frac{U_0}{2l}$ et $b = \frac{U_0}{2}$. On retrouve l'écoulement de Couette. **2)**Le tenseur $\underline{\underline{D}}$ est tel que $D_{13} = D_{31} = U'(z)/2 = \frac{1}{4l}U_0$ et $D_{ij} = 0$ sinon. Le tenseur des contraintes est $\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho_0\nu_n\underline{\underline{D}}$. On a $\pi_{\text{int}} = -\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = -\rho_0\nu_n[U'(z)]^2$. On en déduit que $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{1}{2l}LD\rho_0\nu_n U_0^2$. **3)**La force de contact en $z = l$ est $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_z = -p\,\underline{e}_z + \rho_0\nu_n U'(l)\underline{e}_x$. On a donc $\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2l}LD\rho_0\nu_n U_0^2$. **4)**On remarque que $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) + \mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = 0$. En effet, cet écoulement de Couette est une solution des équations de Navier-Stokes incompressibles. On déduit la relation entre les puissances du théorème de l'énergie cinétique en remarquant que l'accélération $\frac{dU}{dt}$ de cet écoulement est nulle.