EXAMEN 2007

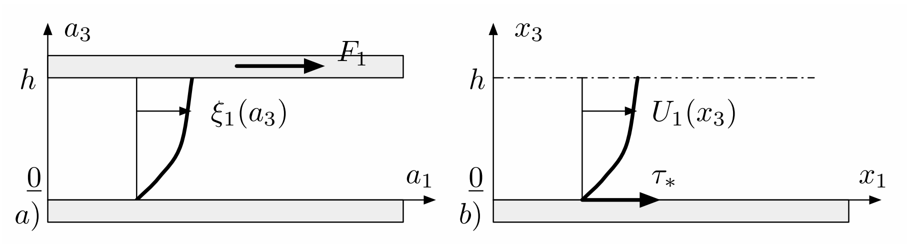

Figure 1: a) Champ de déplacement $\underline{\xi} = \xi_1(a_3)\,\underline{e}^{(1)}$ pour le problème "rhéologie inhomogène". b) Champ de vitesse $\underline{U} = U_1(x_3)\,\underline{e}^{(1)}$ pour le problème "couche limite turbulente".

PROBLÈME 1 Rhéologie inhomogène

On considère un solide élastique encastré entre deux pièces rigides dont les frontières sont, respectivement, les plans $a_3 = 0$ et $a_3 = h$ (voir figure). On suppose que la pièce située en $a_3 \leq 0$ est immobile alors que celle située en $a_3 \geq 0$ peut subir un déplacement δ_1 dans la direction $\underline{e}^{(1)}$. On note ρ_0 la masse volumique du solide qui est homogène dans la configuration de référence. On se place dans de le cadre des petites perturbations.

On applique une force surfacique $\underline{F} = F_1\,\underline{e}^{(1)}$ à la frontière $a_3 = h$ et l'on suppose que le déplacement qui en résulte est le champ stationnaire $\underline{\xi} = \xi_1(a_3)\,\underline{e}^{(1)}$. On s'intéresse à la relation entre δ_1 et F_1.

1) Donner l'expression du tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction de $\xi_1(a_3)$ et de ses dérivées.
2) Dans un premier temps, on suppose que le comportement rhéologique du solide élastique est homogène et isotrope et on note λ et μ ses coefficients de Lamé (constants). Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\xi_1(a_3)$ et de ses dérivées.
3) Quel est l'ensemble des profils de déplacement $\xi_1(x_3)$ qui respectent la loi de conservation de la masse entre la configuration initiale et la configuration déformée.
4) Écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement.
5) Quelles conditions aux limites le profil $\xi_1(a_3)$ doit-il sastisfaire ?
6) En déduire l'expression de $\xi_1(a_3)$, pour F_1 connu, et tracer ce profil.
7) En déduire l'expression de δ_1 en fonction de F_1 et tracer cette fonction.
8) On suppose maintenant que le comportement rhéologique du solide élastique est inhomogène et que le second coefficient de Lamé vérifie $\mu = \mu_0 + \gamma\, a_3$. Que deviennent les conditions aux limites ?

9) Calculer alors l'expression de $\xi_1(a_3)$ et tracer ce profil.
10) En déduire l'expression de δ_1 en fonction de F_1 et son développement limité à l'ordre 2 lorsque $\beta = \gamma\, h/\mu_0$ est petit devant 1.

PROBLÈME 2 Couche limite turbulente

On considère un fluide newtonien incompressible, de masse volumique ρ_0 qui s'écoule sur une paroi immobile de frontière $x_3 = 0$. On suppose que le champ de vitesse stationnaire est de la forme $\underline{U} = U_1(x_3)\, \underline{e}^{(1)}$ et que le débit linéïque $q_1 = \int_0^h U_1(z)\, dz$ est connu.

On modélise la rugosité de la paroi en imposant à la vitesse $\underline{U}$ d'être nulle sur la couche $0 \leq x_3 \leq z_0$. La hauteur z_0 dépend de la taille des rugosités.

1) Donner l'expression du tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{D}}$ en fonction de $U_1(x_3)$ et de ses dérivées dans la couche $x_3 \in [z_0, h]$.
2) Quel est l'ensemble des profils de vitesse $U_1(x_3)$ qui respectent la loi de conservation de la masse.
3) Dans un premier temps, on suppose que le comportement rhéologique du fluide newtonien est homogène et isotrope et on note ν_n sa viscosité cinématique (constante). Écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement en supposant que le champ de pression $p = p_0$ est constant.
4) En déduire l'expression de $U_1(x_3)$, avec q_1 connu, et tracer ce profil.
5) Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction des paramètres connus du problème.
6) Calculer la composante tangentielle τ_* de la force exercée par le fluide sur la paroi en $x_3 = z_0$.
7) Exprimer τ_* en fonction de q_1 et des autres paramètres connus en supposant $z_0/h \ll 1$.
8) On suppose maintenant que le comportement rhéologique du fluide obéit à la loi $\underline{\underline{\sigma}} = -p\ \underline{\underline{I}} + 2\,\rho_0\ \nu_t\, \underline{\underline{D}}$ et que ν_t est modélisé par la relation $\nu_t = \kappa^2\, x_3^2 \sqrt{2\, \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}}$ où κ est une constante. Exprimer la composante tangentielle τ_* de la force surfacique exercée par le fluide sur la paroi en $z = z_0$ en fonction de $U_1(x_3)$ ou de ses dérivées.
9) On suppose que $p = p_0$ est constant. Écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement obtenue pour cette nouvelle loi de comportement rhéologique.
10) On suppose que $U_1'(x_3)$ est positif dans la couche $x_3 \in [z_0, h]$. En déduire que $U_1(x_3) = \frac{u_*}{\kappa} \mathrm{Ln}\,(k\, x_3)$ où u_* et k sont des constantes que l'on déterminera.
11) En déduire l'expression de τ_* en fonction de q_1 lorsque le paramètre $\alpha = z_0/h$ est très petit.
12) Calculer la puissance linéique des efforts intérieurs p_{int} dans la couche $[z_0, h]$.

Corrigé Rhéologie inhomogène

1)On a $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\xi_1'(a_3)\left[\underline{e}^{(1)} \otimes \underline{e}^{(3)} + \underline{e}^{(3)} \otimes \underline{e}^{(1)}\right]$. **2)**On en déduit que $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\,\xi_1'(a_3)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. **3)**Comme $J(\underline{a}) = 1$ pour tout champ de déplacement de la forme $\underline{\xi} = \xi_1(a_3)\,\underline{e}^{(1)}$, tous les profils $\xi_1(a_3)$ sont valides. D'autre part, la conservation de la masse est conservée au premier ordre dans le cadre de l'élasticité linéaire. **4)**Seule la projection sur $\underline{e}^{(1)}$, qui s'écrit $\xi_1''(a_3) = 0$, est non triviale. **5)**Les conditions aux limites sont $\xi_1(0) = 0$ et $\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{e}^{(3)} = F_1\,\underline{e}^{(1)}$ en $a_3 = h$, ce qui s'écrit $\mu\,\xi_1'(h) = F_1$. **6)**On en déduit que $\xi_1(a_3) = F_1\,a_3/\mu$. Ce profil est une droite. **7)**On en déduit que $\delta_1 = F_1\,h/\mu$. Le tracé de cette fonction de F_1 est une droite. **8)**Seule la condition aux limites $(\mu_0+\gamma\,h)\,\xi'(h) = F_1$ a changé. **9)**On a maintenant $d\left[(\mu_0 + \gamma\,a_3)\,\xi'(a_3)\right]/da_3 = 0$. On en déduit $(\mu_0 + \gamma\,a_3)\,\xi_1'(a_3) = F_1$ et donc $\xi_1(a_3) = \frac{F_1}{\gamma}\,\mathrm{Ln}\left(1 + \frac{\gamma\,a_3}{\mu_0}\right)$. **10)**On a $\delta_1 = \frac{F_1}{\gamma}\,\mathrm{Ln}\,(1+\beta) = \frac{F_1}{\gamma}\left[\beta - \beta^2 + O(\beta^3)\right] = \frac{F_1\,h}{\mu_0}[1 - \beta + O(\beta^2)]$.

PROBLÈME 3 Couche limite turbulente

1)On a $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}U_1'(x_3)\left[\underline{e}^{(1)} \otimes \underline{e}^{(3)} + \underline{e}^{(3)} \otimes \underline{e}^{(1)}\right]$. **2)**Tous les champs de vitesse de la forme $\underline{U} = U_1(x_3)\,\underline{e}^{(1)}$ vérifient div $\underline{U} = 0$. **3)**La seule équation non triviale est la projection sur $\underline{e}^{(1)}$ qui s'écrit $U_1''(x_3) = 0$.

4)On a $U_1(x_3) = A(x_3 - z_0)$ et $q_1 = \frac{1}{2}A(h - z_0)^2$. On en déduit que $A = \frac{2q_1}{h^2(1-\alpha)^2}$ et donc l'expression $U_1(x_3) = \frac{2q_1}{h^2(1-\alpha)^2}\left(\frac{x_3}{h} - \alpha\right)$. **5)**On a $\underline{\underline{\sigma}} = -p_0\,\underline{\underline{I}} + \rho_0\,\nu_n\,A\left[\underline{e}^{(1)} \otimes \underline{e}^{(3)} + \underline{e}^{(3)} \otimes \underline{e}^{(1)}\right]$. **6)**On a $\tau_* = \rho_0\,\nu_n\,U_1'(z_0) = \rho_0\,\nu_n\,A$. **7)**Dans le cas $z_0/h \ll 1$, on a $A \sim 2q_1/h^2$ et donc $\tau_* \sim 2\,\rho_0\,\nu_n\,q_1/h^2$. **8)**On a $2\,\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} = [U_1'(z)]^2$. On a donc $\tau_* = \rho_0\,\kappa^2\,z_0^2\,[U_1'(z_0)]^2$. **9)**Seule la projection sur $\underline{e}^{(1)}$ est non triviale et conduit à $d\left[\kappa\,x_3\,U_1'(x_3)\right]^2/dx_3 = 0$. **10)**Comme $U_1'(x_3)$ est positif, on peut écrire $U_1'(x_3) = \frac{1}{\kappa\,x_3}\sqrt{\frac{\tau_*}{\rho_0}}$. En appliquant la condition au limite $U_1(z_0) = 0$, on obtient la forme annoncée avec $u_* = \sqrt{\tau_*/\rho_0}$ et $k = 1/z_0$. **11)**On a $q_1 = \frac{u_*}{\kappa}\int_{z_0}^h \mathrm{Ln}\,\frac{z}{z_0}\,dz = \frac{u_*\,z_0}{\kappa}\left(\frac{h}{z_0}\mathrm{Ln}\,\frac{h}{z_0} - \frac{h}{z_0} + 1\right) = \frac{u_*\,h}{\kappa}\left[1 - \frac{z_0}{h} - \mathrm{Ln}\,\frac{z_0}{h}\right]$. Si $\alpha = z_0/h$ est petit devant 1, on a $q_1 \sim -\frac{u_*\,h}{\kappa}\,\mathrm{Ln}\,\alpha$. **12)**La dissipation linéique s'écrit $p_{int} = -\int_{z_0}^h \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} = -2\int_{z_0}^h \nu_t\,\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} =$. On en déduit $p_{int} = -\kappa^2\int_{z_0}^h z^2\left(\frac{\partial U_1(z)}{\partial z}\right)^3 dz = -\frac{u_*^3}{\kappa}\,\mathrm{Ln}\,\alpha$.