EXAMEN 2008

PROBLÈME 1 Perte de charge

On considère ici des fluides newtoniens dont l'écoulement peut être considéré comme incompressible. On suppose que la masse volumique ρ est constante et on note ν_n la viscosité cinématique. On note $\underline{U}$ la vitesse de l'écoulement et p la pression. On suppose que les forces extérieures de volume $\underline{f} = -\rho\, g\, \underline{e}_z$ sont les forces de gravité dans le repère orthonormé $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

On définit la "charge hydraulique" H par la relation $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g}\, \underline{U}^2$ et le "vecteur perte de charge linéique due aux forces visqueuses" $\underline{J}$ par la relation $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\tau}}$ où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses.

Charge hydraulique

On note $\underline{A} = \underline{\mathrm{grad}}\, \left(\underline{U}^2\right)$, $\underline{B} = \underline{\mathrm{rot}}\, \underline{U} \wedge \underline{U}$ et $\underline{C} = \underline{U} \cdot \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{U}$.

1) Exprimer les composantes A_i et C_i pour $i = 1, 2, 3$ en fonction des sommes $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ ou $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$.
2) Exprimer $\underline{A}$, $\underline{B}$ et $\underline{C}$ en fonction de $\underline{\underline{K}}$, ${}^t\underline{\underline{K}}$ et $\underline{U}$ avec $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{U}$.
3) En déduire l'expression des composantes B_i pour $i = 1, 2, 3$ en fonction des sommes $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ ou $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$.
4) Montrer que $\underline{C} = \alpha\, \underline{A} + \beta\, \underline{B}$ où α et β sont des constantes que l'on précisera.
5) Écrire les équations de Navier-Stokes en utilisant les notations $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{\mathrm{grad}}\, (z)$, $p(x, z)$ et $\underline{J}$. En déduire que l'on a la relation

$$\underline{\mathrm{grad}}\, H = -\underline{J} - \frac{1}{g}\, \underline{B} - \frac{1}{g}\, \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}\ . \tag{1}$$

Écoulement de Poiseuille plan

On suppose ici que l'écoulement est compris entre deux plaques planes situées en $z = 0$ et $z = 2\, h$ où h est une constante (figure 1). On suppose que la vitesse est de la forme $\underline{U} = u(z)\, \underline{e}_x$ et qu'elle s'annule sur les parois horizontales.

6) Écrire les équations de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses énoncées et en projettant sur les axes.
7) On suppose que $p(0, 0) = p_r$ et que le gradient de pression horizontal $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$ est constant. En déduire l'expression de $p(x, z)$ en fonction de x et de z.

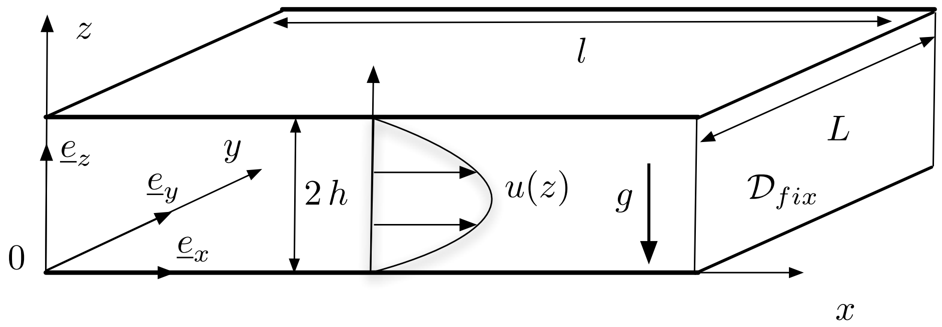

Figure 1: *Écoulement de Poiseuille plan.*

8) Montrer que $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$ où J, la perte de charge linéique due aux frottements, est définie par $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$. En déduire que J est constant et donner son expression en fonction de l'intensité G du forçage de l'écoulement.
9) Calculer $u(z)$ et tracer ce profil.
10) Donner l'expression du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$.
11) Donner l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.
12) Exprimer la fonction $\tau(z) = {}^t\underline{e}_x\, \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{e}_z$ en fonction de G, h et z. Tracer son profil en fonction de z.
13) On considère le domaine fixe $\mathcal{D}_{\text{fix}}$ défini par les inégalités $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq L$ et $0 \leq z \leq 2h$. Exprimer les forces de contact $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$ exercées sur chacune des faces de ce parallélépipède en fonction de $\tau(0)$, $\tau(2h)$, $\tau(z)$, $p(0, z)$, $p(l, z)$, $p(x, 0)$, $p(x, 2h)$ et $p(x, z)$.
14) On note $\tau_* = \tau(0)$. Exprimer en fonction de τ_* les contraintes tangentielles τ_0 et τ_{2h} exercées par le fluide sur les parois situées respectivement en $z = 0$ et $z = 2h$.
15) Exprimer $\underline{I\!\!F} = -\iint_{\partial\mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}\, dS$ en fonction de τ_*, de $\rho\, g$ et des paramètres géométriques de $\mathcal{D}_{\text{fix}}$. Que représente cette grandeur ?
16) Exprimer $I\!\!F_x = -\left(\iint_{\partial\mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\underline{\tau}}\, \underline{n}\, dS\right) \cdot \underline{e}_x$ en fonction de τ_* et des paramètres géométriques de $\mathcal{D}_{\text{fix}}$. Que représente cette grandeur ?
17) Comparer $-\left(\iiint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\tau}}\, d^3x\right) \cdot \underline{e}_x$ à $I\!\!F_x$. Exprimer alors ces deux grandeurs en fonction de J.
18) Déduire des questions précédentes la relation $\tau_* = \rho\, g\, R_H\, J$ où R_H/h est une constante dont on donnera la valeur. Vérifier cette relation en remplaçant τ_* et J par leurs expressions en fonction de G.
19) Calculer la vitesse moyenne $U = \frac{1}{2\,h} \int_0^{2h} u(z)\, dz$.
20) On note $D_H = 4\,h$. Montrer que l'on peut écrire la "loi de Darcy" $U = -K_p\, \frac{dH}{dx}$ où K_p est une constante que l'on exprimera en fonction de D_H, ν_n et g.
21) On définit le coefficient de frottement λ par la relation $J = \lambda\, \frac{U^2}{2\, g\, D_H}$. Exprimer λ en fonction du "nombre de Reynolds" $Re = U\, D_H/\nu_n$.

PROBLÈME 2 Solide pesant encastré

On considère un solide élastique homogène et isotrope de masse volumique ρ et de coefficients de Lamé λ et μ. Il est soumis aux forces de pesanteur $\underline{f} = -\rho\, g\, \underline{e}^{(3)}$ dans le repère orthonormé $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)})$ et encastré entre deux murs verticaux situés en $a_1 = 0$ et $a_1 = 2h$ (figure 2).

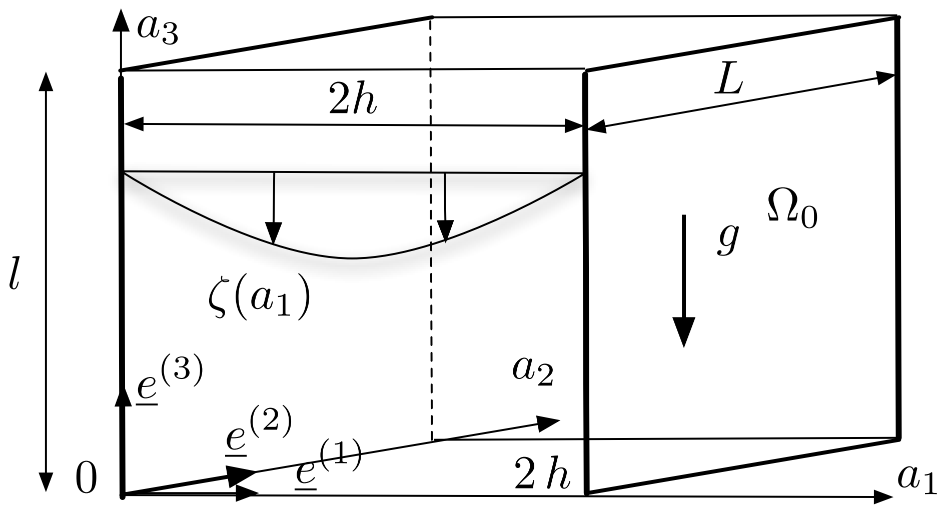

Figure 2: *Déformation d'un solide pesant encastré.*

On suppose que le solide est à l'équilibre et que son champ de déplacement s'écrit $\underline{\xi}(\underline{a}) = -\zeta(a_1)\, \underline{e}^{(3)}$.

1) Calculer $\zeta(a_1)$ et tracer ce profil.
2) On considère le domaine Ω_0 défini par $0 \leq a_1 \leq 2h$, $0 \leq a_2 \leq L$ et $0 \leq a_3 \leq l$. On note $\tau(a_1) = \rho\, g\, (h - a_1)$. Exprimer les forces de contact $\underline{T}(\underline{a}, \underline{n})$ exercées sur chacune des faces de ce parallélépipède en fonction de $\tau(0)$, $\tau(2h)$ et $\tau(a_1)$.
3) Calculer $\underline{\mathbb{F}} = - \iint_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}\, dS$. Commenter le résultat.

Corrigé Perte de charge

Charge hydraulique

1)On a $A_i = 2\, U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ et $C_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. **2)**On a $\underline{A} = 2\,{}^t\underline{\underline{K}}\,\underline{U}$, $\underline{B} = 2\,\underline{\Omega}\;\underline{U} = (\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}})\;\underline{U}$ et $\underline{C} = \underline{\underline{K}}\,\underline{U}$. **3)**On en déduit $B_i = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$. **4)**On a $\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\;\underline{U} = \underline{\underline{K}}\,\underline{U} = {}^t\underline{\underline{K}}\,\underline{U} + (\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}})\,\underline{U} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{grad}}\;\left(\underline{U}^2\right) + \underline{\mathrm{rot}}\;\underline{U} \wedge \underline{U}$. On a donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$. **5)**Les équations de Navier-Stokes incompressibles dans le cas stationnaire et bidimensionnel s'écrivent $\frac{1}{2}\underline{\mathrm{grad}}\;\left(\underline{U}^2\right) + \underline{\mathrm{rot}}\;\underline{U} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho}\,\underline{\mathrm{grad}}\;p - \underline{\mathrm{grad}}\;(g\,z) - g\,\underline{J}$. On en déduit $\underline{\mathrm{grad}}\;H = -\underline{J} - \frac{1}{g}\,\underline{B} - \frac{1}{g}\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ avec $H = \frac{p}{\rho\, g} + z + \frac{1}{2\,g}\,\underline{U}^2$.

Écoulement de Poiseuille plan

6)On a bien $\mathrm{div}\;\underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. La conservation de la quantité de mouvement conduit à $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_n\,u''(z)$, $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$. **7)**On en déduit $p = p_r - G\,x - \rho\,g\,z$. **8)**En multipliant la relation $\underline{\mathrm{grad}}\;H = -\underline{J} - \frac{1}{g}\,\underline{B} - \frac{1}{g}\,\frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ par $\underline{e}_x$ on obtient $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$ car $\underline{B} \cdot \underline{U} = (\underline{\mathrm{rot}}\;\underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot \underline{U} = \underline{0}$ et $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{0}$. Comme $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{G}{\rho\,g}$, on a $J = \frac{G}{\rho\,g}$. **9)**En intégrant $0 = \frac{G}{\rho} + \nu_n\,u''(z)$ et en utilisant les conditions aux limites $u(0) = u(2h) = 0$, on obtient $u(z) = \frac{G}{2\,\rho\,\nu_n}(2h - z)z$. Le profil est une parabole. **10)**On a $D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2}u'(z) = \frac{G}{2\,\rho\,\nu_n}(h - z)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **11)**On a $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \rho\,\nu_n\,u'(z) = G\,(h - z)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. **12)**On a $\tau(z) = \rho\,\nu_n\,u'(z) = G\,(h - z)$. Son profil est une droite. **13)**Sur les faces de normales $\underline{e}_x$, $-\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $-\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ et $-\underline{e}_z$, les forces de contact sont respectivement $\underline{T}(l, y, z, \underline{e}_x) = -p(l, z)\,\underline{e}_x + \tau(z)\,\underline{e}_z$, $\underline{T}(0, y, z, -\underline{e}_x) = p(0, z)\,\underline{e}_x - \tau(z)\,\underline{e}_z$, $\underline{T}(x, L, z, \underline{e}_y) = -p(x, z)\,\underline{e}_y$, $\underline{T}(x, 0, z, -\underline{e}_y) = p(x, z)\,\underline{e}_y$, $\underline{T}(x, y, 2h, \underline{e}_z) = -p(x, 2h)\,\underline{e}_z + \tau(2h)\,\underline{e}_x$ et $\underline{T}(x, y, 0, -\underline{e}_z) = p(x, 0)\,\underline{e}_z - \tau(0)\,\underline{e}_x$. **14)**On a $\tau_* = \tau(0) = G\,h$, $\tau_0 = \tau(0) = \tau_*$ et $\tau_{2h} = -\tau(2h) = \tau_*$. **15)**On a $\underline{\mathbb{F}} = -\rho\,g\,(2\,h\,l\,L)\,\underline{e}_z$. C'est la résultante des forces exercées par le fluide contenu dans $\mathcal{D}_{\mathrm{fix}}$ sur toutes ses frontières. Cette force est égale au poids du fluide. **16)**On a $\mathbb{F}_x = 2\,\tau_*\,(l\,L)$. C'est la force tangentielle exercée par le fluide sur la paroi. **17)**En appliquant le théorème de la divergence, on a $\mathbb{F}_x = -\left(\iiint_{\mathcal{D}_{\mathrm{fix}}} \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\tau}}\;d^3x\right) \cdot \underline{e}_x$. Par définition, on a $\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\tau}} = -\rho\,g\,\underline{J}$. Comme $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$ est constant, on a $\mathbb{F}_x = \rho\,g\,\left(\iiint_{\mathcal{D}_{\mathrm{fix}}} \underline{J}\,dx^3\right) \cdot \underline{e}_x = \rho\,g\,J\,(2h\,l\,L)$. **18)**On en déduit $\tau_* = \rho\,g\,R_H\,J$ avec $R_H = h$. Cette relation est compatible avec les expressions $\tau_* = G\,h$ et $J = G/(\rho\,g)$. **19)**On a $U = G\,h^2/(3\,\rho\,\nu_n)$. **20)**On a $K_p = D_H^2 g/(48\,\nu_n)$. **21)**On a $\lambda = 96/Re$.

Corrigé Solide pesant encastré

1)On a $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\zeta'(a_1)/2$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. La loi de Hooke entraîne alors que $\sigma_{13} = \sigma_{31} = -\mu\,\zeta'(a_1)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. Les équations de Lamé-Clapeyron s'écrivent simplement $0 = -\rho\,g - \mu\,\zeta''(a_1)$. Avec les conditions aux limites

$\zeta(0) = \zeta(2h) = 0$, on trouve que $\zeta(a_1) = \frac{\rho\, g}{2\,\mu}\,(2h - a_1)\, a_1$. Ce profil est une parabole. **2)**Sur les faces de normales $\underline{e}^{(1)}$, $-\underline{e}^{(1)}$, $\underline{e}^{(2)}$, $-\underline{e}^{(2)}$, $\underline{e}^{(3)}$ et $-\underline{e}^{(3)}$, les forces de contact sont respectivement $\underline{T}(2h, a_2, a_3, \underline{e}^{(1)}) = -\tau(2h)\,\underline{e}^{(3)}$, $\underline{T}(0, a_2, a_3, -\underline{e}^{(1)}) = \tau(0)\,\underline{e}^{(3)}$, $\underline{T}(a_1, L, a_3, \underline{e}^{(2)}) = \underline{0}$, $\underline{T}(a_1, 0, a_3, -\underline{e}^{(2)}) = \underline{0}$, $\underline{T}(a_1, a_2, l, \underline{e}^{(3)}) = -\tau(a_1)\,\underline{e}^{(3)}$ et $\underline{T}(a_1, a_2, 0, -\underline{e}^{(3)}) = \tau(a_1)\,\underline{e}^{(3)}$. **3)**On a $\underline{F} = -\rho\, g\,(2h\, l\, L)\,\underline{e}^{(3)}$. C'est la résultante des forces de contact exercées par le domaine Ω_0 sur les parois mais aussi le poids du solide contenu dans Ω_0.