EXAMEN 2009

PROBLÈME 0.1 Mouvement gravitaire sur un plan incliné

On considère un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On choisit le repère orthonormé $(O, \underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)})$ de telle sorte que l'axe Ox_1 soit parallèle au plan incliné et le vecteur $\underline{e}^{(3)}$ perpendiculaire à ce plan. On note $\underline{g} = g\,[\sin\alpha\ \underline{e}^{(1)} - \cos\alpha\ \underline{e}^{(3)}]$ le vecteur gravité. On s'intéresse aux mouvements de milieux continus, solides ou fluides situés sur ce plan incliné sous l'action de la gravité.

On suppose que les milieux continus considérés occupent le domaine Ω constitué des points $\underline{x}$ tels que $0 \leq x_3 \leq h$ où h est une constante. On suppose que la vitesse $\underline{U}$ ou le déplacement $\underline{\xi}$ sont nuls pour $x_3 = 0$ et que la surface libre d'équation $x_3 = h$ est en contact avec un gaz au repos de pression constante p_a.

Écoulement fluide

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible défini, dans le domaine Ω, par le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ de composantes

$$U_1 = U(x_3)\ , \quad U_2 = 0 \quad \text{et} \quad U_3 = 0\ , \tag{1}$$

où $U(x_3)$ est une fonction inconnue indépendante du temps. On note ρ_0 la masse volumique et ν_n la viscosité cinématique de ce fluide.

1) Calculer le champ d'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}$.
2) Exprimer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ en fonction de la dérivée $U'(x_3)$.
3) En déduire l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en notant $p(\underline{x}, t)$ le champ de pression.
4) En déduire l'expression du champ de vecteurs $\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$.
5) Exprimer les trois composantes du champ de vecteur $\rho_0\,\underline{g} + \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$. En déduire trois équations aux dérivées partielles faisant intervenir $p(\underline{x}, t)$ et $U(x_3)$.
6) Calculer la force de contact $\underline{T}_h$ exercée par le gaz de pression p_a sur le fluide. En déduire la valeur de la pression en $z = h$ et de $U'(h)$.
7) Montrer que $p = A + B\,x_3$, où A et B sont des constantes que l'on déterminera, est solution des équations du mouvement.
8) Exprimer $U(x_3)$ en fonction de α, g, h, ν_n et x_3.
9) Tracer schématiquement cette fonction pour $x_3 \in [0, h]$.
10) En déduire la force de contact $\underline{T}_0$ exercées par la paroi sur le fluide. Représenter schématiquement cette force sur un graphe.

Déformation solide

On considère la petite déformation du solide élastique définie, dans le domaine Ω, par le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{x}, t)$ de composantes

$$\xi_1 = \xi(x_3) \ , \quad \xi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \xi_3 = \zeta(x_3) \ . \tag{2}$$

On note ρ_s la masse volumique du solide et λ et μ ses coefficients de Lamé.

11) Exprimer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction des dérivées $\xi'(x_3)$ et $\zeta'(x_3)$.
12) En déduire l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.
13) Exprimer les composantes du vecteur $\rho_s\, \underline{g} + \underline{\mathrm{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$. En déduire une équation différentielle ordinaire pour $\xi(x_3)$ et $\zeta(x_3)$.
14) Calculer la force de contact $\underline{T}_h$ exercée par le gaz de pression p_a sur le solide. En déduire les valeurs de $\xi'(h)$ et $\zeta'(h)$.
15) Exprimer $\xi(x_3)$ et $\zeta(x_3)$ en fonction de g, h, α, λ et μ.
16) Tracer schématiquement ces fonctions pour $x_3 \in [0, h]$.
17) Calculer la force de contact $\underline{T}_0$ exercée par le plan incliné sur le solide élastique. Représenter schématiquement cette force sur un graphe.
18) Comparer avec le cas de l'écoulement fluide traité dans la question 10.

Interaction entre fluide et solide

On suppose maintenant que le milieu continu est constitué du fluide newtonien pour $0 \leq x_3 \leq h_*$ et du solide élastique pour $h_* \leq x_3 \leq h$. On suppose que $\underline{U} = U(x_3)\, \underline{e}^{(1)}$ est le champ de vitesse du fluide et $\underline{\xi} = [U_*\, t + \xi(x_3)]\, \underline{e}^{(1)} + \zeta(x_3)\, \underline{e}^{(3)}$ est le champ de déplacement du solide en petite déformation, la constante U_* et les fonctions $U(x_3)$, $\xi(x_3)$ et $\zeta(x_3)$ étant inconnues.

19) On suppose que $\xi(h_*) = 0$ et $\zeta(h_*) = 0$. Calculer $\xi(x_3)$ et $\zeta(x_3)$ en utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement ainsi que la continuité des forces de contact à la surface libre d'équation $x_3 = h$.
20) En déduire l'expression des forces de contacts $\underline{T}_*$ exercées par le solide sur le fluide à l'interface d'équation $x_3 = h_*$.
21) Le champ de vitesse et le champ de déplacement sont continus à l'interface entre le fluide et le solide. En déduire que $U(h_*) = U_*$. En utilisant la condition aux limites $U(0) = 0$ ainsi que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, exprimer $U(x_3)$ en fonction de U_*.
22) En déduire l'expression de la projection $\underline{e}^{(1)} \cdot \underline{T}_*$ des forces de contacts $\underline{T}_*$ exercées par le solide sur le fluide à l'interface d'équation $x_3 = h_*$ en fonction de U_* et des autres paramètres du problème.
23) En déduire l'expression de la vitesse U_* en fonction des paramètres du problème.

Corrigé page 3

Corrigé Mouvement gravitaire sur un plan incliné

Écoulement fluide

1) Comme $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \underline{0}$ et $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \ = U_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$, on a $\frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{0}$. **2)** On a $D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2}\, U'(x_3)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **3)** Comme $\underline{\underline{\sigma}} = -p\, \underline{\underline{I}} + 2\, \rho_0\, \nu_n\, \underline{\underline{D}}$, on en déduit $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \rho_0\, \nu_n\, U'(x_3)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. **4)** On a $\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}}\ p + \rho_0\, \nu_n\, U''(x_3)\, \underline{e}^{(1)}$. **5)** La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + g\, \sin\alpha + \nu_n\, U''(x_3)$, $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_2}$ et $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} + g\, \cos\alpha$. **6)** On a $\underline{T}_h = \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, h, t)\, \underline{e}^{(3)} = -p(x_1, x_2, h, t)\, \underline{e}^{(3)} + \rho_0\, \nu_n\, U'(h)\, \underline{e}^{(1)}$. Comme $\underline{T}_h = -p_a\, \underline{e}^{(3)}$, on a $p(x_1, x_2, h, t) = p_a$ et $U'(h) = 0$. **7)** Comme $0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho_0\, g\, \cos\alpha$ et $p(x, y, h, t) = p_a$, on a $p = p_a - \rho_0\, g\, \cos\alpha\, (x_3 - h)$ et donc $A = p_a + \rho_0\, g\, h\, \cos\alpha$ et $B = -\rho_0\, g\, \cos\alpha$. On a bien $\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$. **8)** On a $0 = g\, \sin\alpha + \nu_n\, U''(x_3)$ avec $U(0) = 0$ et $U'(h) = 0$. On en déduit $U(x_3) = \frac{g\, \sin\alpha}{2\, \nu_n}\, x_3\, (2\, h - x_3)$. **9)** La tracé de la fonction $U(x_3)$ est celui d'une parabole dont le sommet est en $x_3 = 0$. **10)** Comme $U'(0) = \frac{g\, h \sin\alpha}{\nu_n}$ On a $\underline{T}_0 = -\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, 0)\, \underline{e}^{(3)} = (p_a + \rho_0\, g\, h\, \cos\alpha)\, \underline{e}^{(3)} - \rho_0\, g\, h\, \sin\alpha\, \underline{e}^{(1)}$.

Déformation solide

11) On a $\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \frac{1}{2}\xi'(x_3)$, $\epsilon_{33} = \zeta'(x_3)$ et $\epsilon_{ij} = 0$ sinon. **12)** Comme $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\, \text{tr}\, (\underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{I}} + 2\, \mu\, \underline{\underline{\epsilon}}$, on en déduit $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda\, \zeta'(x_3)$, $\sigma_{33} = (\lambda + 2\, \mu)\, \zeta'(x_3)$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu\, \xi'(x_3)$ et $\sigma_{ij} = 0$ sinon. **13)** La loi de conservation de la quantité de mouvement $\rho_s\, \underline{g} + \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = \rho_s\, \underline{g} + (\lambda + \mu)\, \underline{\text{grad}}\ (\text{div}\ \underline{\xi}) + \mu\, \Delta \underline{\xi} = 0$ entraine $\rho_s\, g\, \sin\alpha + \mu\, \xi''(x_3) = 0$ et $-\rho_s\, g\, \cos\alpha + (\lambda + 2\, \mu)\, \zeta''(x_3) = 0$. **14)** On a $\underline{T}_h = \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, h)\, \underline{e}^{(3)} = \lambda\, \xi'(h)\, \underline{e}^{(1)} + (\lambda + 2\, \mu)\, \zeta'(h)\, \underline{e}^{(3)}$. Comme $\underline{T}_h = -p_a\, \underline{e}^{(3)}$, on a $\xi'(h) = 0$ et $(\lambda + 2\, \mu)\, \zeta'(h) = -p_a$. **15)** En intégrant les équations différentielles ordinaires avec les conditions aux limites $\xi(0) = \zeta(0) = 0$ en plus des conditions aux limites en $x_3 = h$, on obtient $\xi(x_3) = \frac{\rho_s\, g\, \sin\alpha}{2\, \mu}\, x_3 (2\, h - x_3)$ et $\zeta(x_3) = \frac{\rho_s\, g\, \cos\alpha}{2(\lambda + 2\, \mu)}\, x_3 (x_3 - 2\, h) - \frac{p_a}{\lambda + 2\, \mu} x_3$. **16)** Le tracé des fonction $\xi(x_3)$ et $\zeta(x_3)$ est celui de deux paraboles. **17)** On a $\underline{T}_0 = -\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, 0)\, \underline{e}^{(3)} = -\mu\, \xi'(0)\, \underline{e}^{(1)} - (\lambda + 2\, \mu)\, \zeta'(0)\, \underline{e}^{(3)} = -\rho_s\, g\, h\, \sin\alpha\, \underline{e}^{(1)} + (p_a + \rho_s\, g\, h\, \cos\alpha)\, \underline{e}^{(3)}$. **18)** On obtient le même résultat que pour le cas fluide. Cette force, qui doit compenser le poids du milieu continu ainsi que la pression du gaz, ne dépend pas de son comportement rhéologique.

Interaction entre fluide et solide

19) En changeant x_3 en $x_3 - h_*$ et h par $h - h_*$ dans les résultats précédents, on obtient les déplacements $\xi(x_3) = \frac{\rho_s\, g\, \sin\alpha}{2\, \mu}\, (x_3 - h_*)(2\, h - h_* - x_3)$ et $\zeta(x_3) = \frac{\rho_s\, g\, \cos\alpha}{2(\lambda + 2\, \mu)}\, (x_3 - h_*)(2\, h - h_* - x_3) - \frac{p_a}{\lambda + 2\, \mu}(x_3 - h_*)$. **20)** En utilisant les résultats précédents, on a $\underline{T}_* = \rho_s\, g\, (h - h_*)\, \sin\alpha\, \underline{e}^{(1)} - [p_a + \rho_s\, g\, (h - h_*)\, \cos\alpha]\, \underline{e}^{(3)}$. **21)** L'équation différentielle $0 = g\, \sin\alpha + \nu_n\, U''(x_3)$ avec $U(0) = 0$ et $U(h_*) = U_*$ conduit à $U(x_3) = \frac{g\, \sin\alpha}{2\, \nu_n}\, x_3\, (h_* - x_3) + U_*\, x_3 / h_*$. **22)** On a $\underline{e}^{(1)} \cdot \underline{T}_* = -\frac{1}{2}\rho_0\, g\, h_*\, \sin\alpha + \rho_0\, \nu_n\, U_* / h_*$. **23)** En identifiant les deux expressions de la projection de $\underline{T}_*$ sur $\underline{e}^{(1)}$, on obtient $\rho_s\, g\, (h - h_*)\, \sin\alpha = [-\frac{1}{2}\rho_0\, g\, h_*\, \sin\alpha + \rho_0\, \nu_n\, U_* / h_*]$ d'où $U_* = \frac{g\, h_*\, \sin\alpha}{\nu_n} \left[\frac{\rho_s}{\rho_0}\, (h - h_*) + \frac{1}{2} h_*\right]$.