

PARTIEL 2005

PROBLÈME 0.1

 Chat dans un écoulement parabolique

On considère, dans ce problème, une longueur de référence d que l'on prendra égale à 1 cm pour les tracés graphiques. La valeur numérique d'une deuxième longueur, notée l , n'est pas précisée ici. Étant données trois longueurs X , Y et L , on définit le domaine $\Omega_0(X, Z, L)$ par :

$$\Omega_0(X, Z, L) = \left\{ \underline{a} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad 0 \leq a_2 \leq l, \quad |a_1 - X| \leq L \right. \\ \left. \text{et} \quad \frac{(a_1 - X)^2}{L} \leq a_3 - Z \leq \frac{3}{4}L + \frac{(a_1 - X)^2}{4L} \right\}$$

- 1) Sur un même graphique, tracer la projection dans le plan (a_1, a_3) des domaines $\Omega_0(0, 0, 4d)$, $\Omega_0(-2d, 2d, d/2)$, $\Omega_0(2d, 2d, d/2)$ et $\Omega_0(0, d/2, d)$.

Champ de vitesse

On considère un mouvement défini par sa représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ dont les composantes sont $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ et $U_3 = \beta (16d^2 - x_1^2)$ où β est une constante positive qui prendra la valeur $\beta = \frac{1}{16} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ dans pour les tracés graphiques.

- 2) Calculer l'accélération $\frac{d\underline{U}}{dt}(\underline{x}, t)$.
- 3) Calculer $\underline{D}(\underline{x}, t)$ pour les points \underline{x} tels que $x_1 = 2d$.
- 4) Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$ pour ces mêmes points.
- 5) Tracer le profil de vitesse U_3 en fonction de x_1 .
- 6) Calculer la trajectoire $\underline{x}(t)$ issue du point $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
- 7) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$.
- 8) Donner l'expression du mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$.
- 9) En déduire l'expression du mouvement inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$.
- 10) Donner l'expression de la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ de vitesse.

Déformée du chat

- 11) Montrer que la projection dans le plan (x_1, x_3) de l'image $\Omega_t(X, Z, L)$ au temps t de configuration de référence $\Omega_0(X, Z, L)$ est une surface comprise en deux courbes que l'on explicitera. On pourra noter $\gamma = \beta t$.
- 12) Sur le même graphique, tracer précisément la projection, dans le plan (x_1, x_3) , du domaine déformé $\Omega_t(0, 0, 4d)$ pour $t = 4 \text{ s}$.

- 13) Tracer précisément la projection, dans le plan (x_1, x_3) , du domaine déformé $\Omega_t(0, d/2, d)$ pour $t = 4$ s.
- 14) Toujours sur le même graphique, tracer schématiquement et sans calculs la projection dans le plan (x_1, x_3) des domaines déformés $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$ et $\Omega_t(-2d, 2d, d/2)$ pour $t = 4$ s.
- 15) Donner l'expression $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la représentation lagrangienne du champ B dont la représentation eulérienne est $B(\underline{x}, t) = \alpha x_1^2$ où α est un constante.
- 16) On note $\mathcal{D}(t) = \Omega_t(0, 0, 4d)$ et $\mathcal{B}(t) = \iint_{\mathcal{D}(t)} B(\underline{x}, t) d^3x$. Calculer $\mathcal{B}(0)$.
- 17) Calculer $\frac{d}{dt}\mathcal{B}(t)$.
- 18) En déduire $\mathcal{B}(t)$ pour tout temps t .

Grande déformation

On considère la grande déformation $\underline{X}(\underline{a})$ définie par ses composante $X_1 = a_1$, $X_2 = a_2$ et $X_3 = a_3 + \gamma(16d^2 - a_1^2)$ avec $d = 1$ cm et $\gamma = \frac{1}{4}$ cm⁻¹.

- 19) Quel lien existe-t-il entre cette grande déformation $\underline{X}(\underline{a})$ et le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ des questions précédentes.
- 20) Calcul le gradient de la déformation $\underline{F}(\underline{a})$ pour $\underline{a} = 2d(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.
- 21) En déduire le tracé des images respectives des petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a \underline{e}^{(3)}$ pris autour du point $\underline{a} = 2d(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.
- 22) En déduire un tracé schématique de $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$ pour $t = 4$ s.
- 23) Calculer le volume du domaine $\Omega_0(0, 0, 4d)$.
- 24) En déduire le volume du domaine $\Omega_t(0, 0, 4d)$ pour $t = 4$ s.
- 25) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a})$ pour $\underline{a} = 2d(\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)})$.
- 26) En déduire l'angle de glissement des directions $\underline{e}^{(1)}$ et $\underline{e}^{(3)}$. Comparer avec le résultat d'une des questions précédentes.
- 27) En déduire la dilatation relative des petits vecteurs orienté dans la direction $\underline{e}^{(3)}$.
- 28) Calculer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{0})$ obtenus pour $\underline{a} = \underline{0}$.
- 29) Comparer avec le tracé de $\Omega_t(0, d/2, d)$.

Corrigé Chat dans un écoulement parabolique

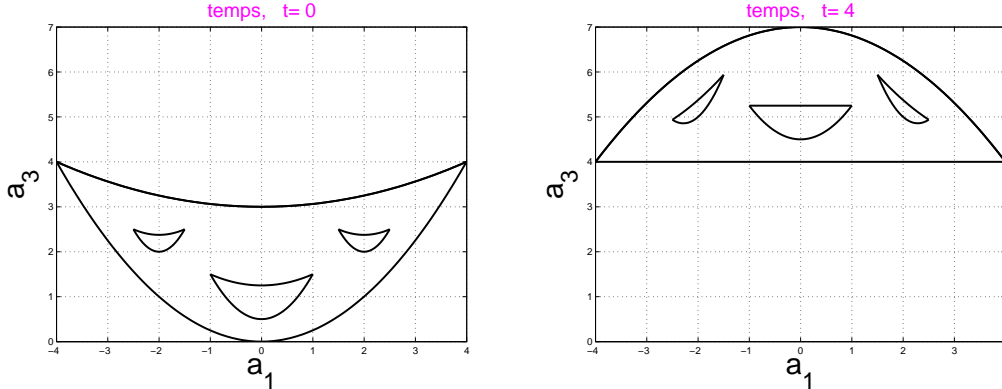


Figure 1: Domains : a) avant déformation pour $t = 0$, b) au temps $t = 4$ s.

1) En projection dans le plan (a_1, a_3) , le domaine $\Omega_0(0, 0, L)$ est compris au-dessus d'un morceau de parabole reliant les points $(-L, L)$, $(0, 0)$ et (L, L) , et au-dessous d'un morceau de parabole reliant les points $(-L, L)$, $(0, 3L/4)$ et (L, L) , ce qui ressemble à un croissant inscrit dans un carré de côté $2L$. Le domaine $\Omega_0(X, Y, L)$ s'obtient à partir de $\Omega_0(0, 0, L)$ par une translation de vecteur $(X, 0, L)$. Le tracé des quatre ensembles indiqués ressemble à une tête de chat (voir figure) inscrit dans un parallépipède rectangle dont la projection dans le plan (a_1, a_3) est un carré de côté $8d$.

Champ de vitesse

2) Comme $\frac{\partial U}{\partial t} = \underline{0}$, $U_1 = U_2 = 0$ et $\frac{\partial U}{\partial x_3} = \underline{0}$, on a $\frac{dU}{dt} = \underline{0}$. 3) Les composantes K_{ij} du gradient des vitesses \underline{K} sont toutes nulles sauf $K_{31} = -2\beta x_1$. On en déduit que les composantes D_{ij} sont toutes nulles sauf $D_{13} = D_{31} = -\beta x_1$, qui valent $D_{13} = D_{31} = -2\beta d$ au point indiqué. 4) Les composantes du tenseur des rotations $\underline{\Omega}$ sont toutes nulles sauf $\Omega_{13} = -\Omega_{31} = \beta x_1$. En utilisant la relation $\Omega_{31} + \omega_2 = 0$, on en déduit $\underline{\omega} = \beta x_1 \underline{e}^{(2)}$ qui vaut $\underline{\omega} = 2\beta d$ au point indiqué. 5) Le profil de vitesse $U_3(x_1)$ est celui d'une parabole qui s'annule pour $|x_1| = 4d$ et est maximum pour $x_1 = 0$. 6) L'équation de la trajectoire est $\underline{x}(t) = \underline{a} + \beta(16d^2 - a_1^2)t \underline{e}^{(3)}$. Ces trajectoires forment des droites parallèles à $\underline{e}^{(3)}$. 7) Comme le champ de vitesse est stationnaire, lignes de champ et trajectoires sont confondues. 8) On a $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a} + \beta(16d^2 - a_1^2)t \underline{e}^{(3)}$. 9) On en déduit $\underline{A}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \beta(16d^2 - x_1^2)t \underline{e}^{(3)}$. 10) On a $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \beta(16d^2 - a_1^2)$.

Déformée du chat

11) La projection de $\Omega_t(X, Z, L)$ dans le plan (x_1, x_3) est comprise au-dessus de la parabole d'équation $x_3 = Z + \gamma(16d^2 - x_1^2) + (x_1 - X)^2/L$, qui s'écrit aussi

$x_3 - \left(Z + 16\gamma d^2 + \frac{X^2}{L}\right) = \left(\frac{1}{L} - \gamma\right) x_1^2 - \frac{2X}{L} x_1$ et en-dessous de la parabole d'équation aussi $x_3 - \left(Z + 16\gamma d^2 + \frac{X^2}{4L} + \frac{3L}{4}\right) = \left(\frac{1}{4L} - \gamma\right) x_1^2 - \frac{2X}{L} x_1$. **12)** La projection de $\Omega_t(0, 0, 4d)$ est la surface au-dessus de la parabole $x_3 - 16\gamma d^2 = \left(\frac{1}{4d} - \gamma\right) x_1^2$ et au-dessous de la parabole $x_3 - 16\gamma d^2 - 3d = \left(\frac{1}{16d} - \gamma\right) x_1^2$. En utilisant les valeurs numériques de β , t et d qui conduisent à $\gamma = \frac{1}{4} \text{ cm}^{-1}$ et $d = 1 \text{ cm}$, ces équations s'écrivent respectivement $x_3 = 4 \text{ cm}$ et $x_3 - 7 \text{ cm} = -3 \text{ cm} \left(\frac{x_1}{4 \text{ cm}}\right)^2$. La surface est au-dessus de la droite $x_3 = 4 \text{ cm}$ et en-dessous de la parabole concave passant par $(-4, 4)$, $(0, 7)$ et $(4, 4)$ (en cm). **13)** L'application numérique montre que la projection de l'image de $\Omega_t(0, d/2, d)$ est au-dessus de la parabole $x_3 - 4.5 \text{ cm} = 0.75 \text{ cm} \left(\frac{x_1}{1 \text{ cm}}\right)^2$ et en-dessous de la droite $x_3 = 5.25 \text{ cm}$. **14)** Le tracé de la forme des "yeux du chat" au temps $t = 4 \text{ s}$ se fait intuitivement en interpolant la déformation des "la tête" et "la bouche". **15)** On a $B^{(L)}(\underline{a}, t) = \alpha a_1^2$. **16)** On a $\mathcal{B}(0) = \alpha l \int_{-4d}^{4d} a_1^2 \left(\int_{a_1^2/(4d)}^{3d+a_1^2/(16d)} da_3 \right) da_1 = \alpha l \int_{-4d}^{4d} \left(3da_1^2 + \frac{a_1^4}{16d} - \frac{a_1^4}{4d} \right) da_1 = \frac{256}{5} \alpha l d^4$. **17)** On a $\frac{d}{dt} \mathcal{B}(t) = \iint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dB}{dt} + B \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x = 0$ car $\frac{dB}{dt} = 0$ et $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. **18)** On en déduit que $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(0)$.

Grande déformation

19) On peut écrire $\underline{X}(\underline{a}) = \underline{X}(\underline{a}, \gamma/\beta)$. On s'intéresse à la grande déformation entre la configuration de référence à $t = 0$ et la configuration à $t = \gamma/\beta$, qui vaut $t = 4 \text{ s}$ pour l'application numérique. **20)** Seules les composantes $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{31} = -2\gamma a_1$ de $\underline{F}(\underline{a})$ sont non nulles. On a $F_{31} = -4\gamma d$ pour le point particulier indiqué. **21)** On a $\underline{\delta x} = \underline{F} \underline{\delta a} = \delta a \left(\underline{e}^{(1)} - 4\gamma d \underline{e}^{(3)} \right)$ et $\underline{\delta x}' = \underline{F} \underline{\delta a}' = \delta a \underline{e}^{(3)}$. **22)** On a $\underline{\delta x} = \delta a \left(\underline{e}^{(1)} - \underline{e}^{(3)} \right)$. Comme la projection de $\Omega_0(2d, 2d, d/2)$ est inscrite dans le rectangle de sommets $(1.5d, 2d)$, $(1.5d, 2.5d)$, $(2.5d, 2.5d)$ et $(2.5d, 2d)$, on peut considérer, en considérant que $\delta a = d/2$ est petit (facteur 8 devant $4d$), celle de $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$ est inscrite dans le parallépipède de sommets $(1.5d, 2.5d)$, $(1.5d, 3d)$, $(2.5d, 2d)$ et $(2.5d, 1.5d)$. On en déduit le tracé approximatif de $\Omega_t(2d, 2d, d/2)$. **23)** Le volume est $\mathcal{V}_0 = l \int_{-4d}^{4d} \int_{a_1^2/(4d)}^{3d+a_1^2/(16d)} da_1 da_3 = 16d^2$. **24)** Comme $J(\underline{a}) = \det \underline{F}(\underline{a}) = 1$, les volumes sont conservés. Le volume de $\Omega_t(0, 0, 4d)$ est égal à $16d^2$ pour tout temps t . **25)** On en déduit que $C_{11} = 1 + 4\gamma a_1^2$, $C_{22} = C_{33} = 0$ et $C_{13} = C_{31} = -2\gamma a_1$ sont les seules composantes non nulles de $\underline{C}(\underline{a})$. **26)** On en déduit que $\sin \gamma_{13} = C_{13} / \sqrt{C_{11} C_{33}} = -2\gamma a_1 / \sqrt{1 + 4\gamma a_1^2}$. Pour le point considéré, on obtient $\sin \gamma_{13} = -4\gamma d / \sqrt{1 + 16\gamma d^2}$. L'application numérique conduit à $\sin \gamma_{13} = -1/\sqrt{2}$ ce qui entraîne $\gamma_{13} = -\pi/4$. Ce résultat est conforme avec la réponse de la question 21. **27)** La dilatation relative dans la direction $\underline{e}^{(3)}$ est $\sqrt{C_{33}} = 1$. **28)** On a $\underline{C}(\underline{0}) = \underline{I}$. Il n'y a pas de déformation dans le voisinage de $\underline{0}$. **29)** On remarque que la déformation de la bouche du chat est faible, même si elle est visible à cause de sa taille finie.