PARTIEL 2006

PROBLÈME 0.1 La gomme et le chat

On considère, dans ce problème, une longueur de référence l que l'on prendra égale à 2 cm pour les tracés graphiques. On définit le domaine Ω_0 par :

$$\Omega_0 = \left\{ \underline{a} \in I\!R^3 \text{ tel que } 0 \le a_2 \le l\ , \quad |a_1| \le l \;\text{ et }\; -\sqrt{l^2 - a_1^2} \le a_3 \le l \right\} \ .$$

Grandes déformations

On considère un mouvement $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$x_1 = k(t)\, a_1\ , \quad x_2 = a_2\ , \quad \text{et} \qquad x_3 = a_3 + \beta(t)\, a_1^2\ , \tag{1}$$

avec $k(t) = 1 + \alpha[1 - \cos(2\,\omega\, t)]$ et $\beta = \beta_0 \sin(\omega\, t)$ avec $\alpha \ge 0$ et $\beta_0 \ge 0$. Pour les tracés graphiques, on considérera les valeurs numériques $\alpha = 1/2$, $\beta_0 = 1$ cm^{-1} et $\omega = \pi/4$ s^{-1}.

1) Tracer l'intersection entre le domaine Ω_0 et le plan $a_2 = 0$.
2) Tracer sur un même graphe les fonctions $k(t)$ et $\beta(t)$ en fonction du temps.
3) Calculer le tenseur des dilations $\underline{\underline{C}}(\underline{a}, t)$ pour tout point $\underline{a}$.
4) Calculer le volume du domaine Ω_0 et de son image $\Omega(t)$.
5) On considère les points $E_i, i = 1, ..., 6$ dont les coordonnées respectives $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ sont $E_1 : (-l, 0, 0)$, $E_2 : (0, 0, -l)$, $E_3 : (l, 0, 0)$, $E_4 : (l, 0, l)$, $E_5 : (0, 0, l)$ et $E_6 : (-l, 0, l)$. Tracer ces six points dans Ω_0.
6) Tracer les images $H_i, i = 1, ..., 6$ des ces six points de coordonnées $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ au temps $t_* = 2$ s.
7) Calculer la jacobienne $\underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)$ pour le point E_6 au temps $t = t_*$.
8) Dessiner deux petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a\ \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a\ \underline{e}^{(3)}$ autour de E_6 en choisissant δa quelconque. Dessiner leurs images respectives $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ autour du point H_6.
9) Déduire des questions précédentes un tracé approximatif de la frontière $\partial\Omega(t_*)$ du domaine $\Omega(t_*)$ dans le plan (x_1, x_3).

Images de cercles

10) Interpréter les composantes de $\underline{\underline{C}}(\underline{0}, t)$ pour tous temps.
11) On considère $\mathcal{C}_b$ le cercle de centre $\underline{a} = \underline{0}$ et de rayon $l/4$ dans le plan (x_1, x_3). Dessiner le cercle $\mathcal{C}_b$ dans le domaine Ω_0 ainsi que son image au temps $t = t_* = 2$ s dans le domaine $\Omega(t_*)$, même schématiquement.
12) Donner l'équation de cette image à l'aide des coordonnées (x_1, x_3).

13) On considère les points G et D dont les coordonnées $\underline{a}$ respectives sont $G : (-l/2, 0, l/2)$ et $D : (l/2, 0, l/2)$. Dessiner ces points dans le domaine Ω_0 ainsi que leurs images respectives L and R au temps $t = t_*$ dans le domaine $\Omega(t_*)$.
14) Calculer la jacobienne $\underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)$ autour du point D.
15) Dessiner deux petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a \; \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a \; \underline{e}^{(3)}$ autour de D en choisissant δa quelconque. Dessiner leurs images respectives $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ autour de l'image de D au temps $t = t_*$.
16) Calculer, pour le temps $t = t_*$, l'angle de glissement des directions Ox_1 et Ox_3 prises autour du point D à $t = 0$ s. Comparer avec la question précédente.
17) Déduire des questions précédentes le tracé approximatif de l'image au temps $t = t_*$ des petits cercles de centres respectifs G ou D et de rayon $l/10$.
18) Dessiner approximativement les images successives de Ω_0 de $t = 0$ s à $t = 4$ s.
19) À quoi est égal $\Omega(t)$ pour $t = 4$ s ?

Cinématique

20) Calculer le champ de vitesse eulérien $\underline{U}(\underline{x}, t)$ associé au mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ ci-dessus.
21) Donner l'expression $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la représentation lagrangienne du champ B dont la représentation eulérienne est $B(\underline{x}, t) = \gamma \, x_3^2$ pour $x_3 \geq 0$ et $B(\underline{x}, t) = 0$ pour $x_3 \leq 0$, où γ est un constante.
22) Donner l'expression de $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t)$.
23) Calculer les tenseurs des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$.
24) Tracer la trajectoire issue du point D à $t = 0$ s jusqu'à $t = 4$ s.
25) Calculer le taux de dilation relatif $\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt}[\delta\mathcal{V}(t)]$ d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ pris autour de cette trajectoire.
26) Donner l'expression du vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$.
27) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse pour $t = t_* = 2$ s.
28) On note $\rho(\underline{x}, t)$ la masse volumique d'un milieu continu contenu dans le domaine $\Omega(t)$. Écrire l'équation de conservation de la masse à l'aide des fonctions $k(t)$, $\beta(t)$.
29) En déduire, en supposant que $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est un champ homogène à $t = 0$, son expression pour tout temps.
30) Comparer ce résultat avec l'expression du jacobien $J(\underline{a}, t)$.
31) On note $\mathcal{B}(t) = \iiint_{\Omega(t)} B(\underline{x}, t) \; d^3x$. Calculer $\mathcal{B}(0)$.

Corrigé page 3

$\boxed{\text{Corrigé}}$ La gomme et le chat

Grandes déformations

1)La trace de la frontière $\partial\Omega_0$ dans le plan $x_2 = 0$ est représentée sur la figure 1a). **2)**La fonction $k(t)$ oscille entre $k(0) = 1$ et $k(2) = 2$ avec une période de 4 s. La fonction $\beta(t)$ oscille entre $\beta(6) = -1$ et $\beta(2) = 1$ sur une période de 8 s. **3)**On a $C_{11} = k^2 + 4\beta a_1^2$, $C_{22} = C_{33} = 1$, $C_{13} = C_{31} = 2\beta a_1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. **4)**Le domaine Ω_0 étant un cylindre dont la section droite est la réunion d'un rectangle et d'un demi-disque, on calcule aisément que son volume est $\mathcal{V}(\Omega_0) = (2 + \pi/2)l^3$. Comme $J(\underline{a}, t) = k(t)$, on a $\mathcal{V}[\Omega(t)] = \iiint_{\Omega(t)} dx^3 = \iiint_{\Omega_0} J(\underline{a}, t)\, da^3 = k(t)\mathcal{V}(\Omega_0)$ **5)**Les coordonnées $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ des points images des points E_i sont $H_1 : (-4, 0, 4)$, $H_2 : (0, 0, -2)$, $H_3 : (4, 0, 4)$, $H_4 : (4, 0, 6)$, $H_5 : (0, 0, 2)$ et $H_6 : (-4, 0, 6)$ exprimées en cm. **6)**Ces points sont représentés sur la figure 1b). **7)**Les composantes de $\underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)$ pour $\underline{a} = (-l, 0, l)$ sont $F_{11} = 2$, $F_{31} = -4$, $F_{22} = F_{33} = 1$ et $F_{ij} = 0$ sinon. **8)**On a $\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}' = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)\underline{\delta a}'$ où $\underline{a}$ est le vecteur des composantes du point E_6. On a donc $\underline{\delta x} = \delta a(2, 0, -4)$ et $\underline{\delta x}' = \delta a(0, 0, 2)$. **9)**Le tracé de la frontière de $\Omega(t_*)$ est effectué sur la figure 1b).

Images de cercles

10) Les composantes de $\underline{\underline{C}}(\underline{0}, t)$ sont $C_{11} = k^2$, $C_{22} = C_{33} = 1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. Les angles de glissement des directions de base sont nulles. La dilation relative dans la direction $\underline{e}^{(1)}$ est $k(t)$. Elle est égale à un pour les autres directions. **11)**La question précédente permet un tracé approximatif du cercle $\mathcal{C}_b$ et de son image $\underline{X}(\mathcal{C}_b, t_*)$ qui sont représentés sur la figure 1. **12)**L'équation du contour fermé $\underline{X}(\mathcal{C}_b, t_*)$ dans le plan (x_1, x_3) s'écrit $x_1^2/k^2(t) + \left[x_3 - \beta(t)\, x_1^2/k^2(t)\right]^2 = l^2/16$. **13)**Le tracé des points G et D et

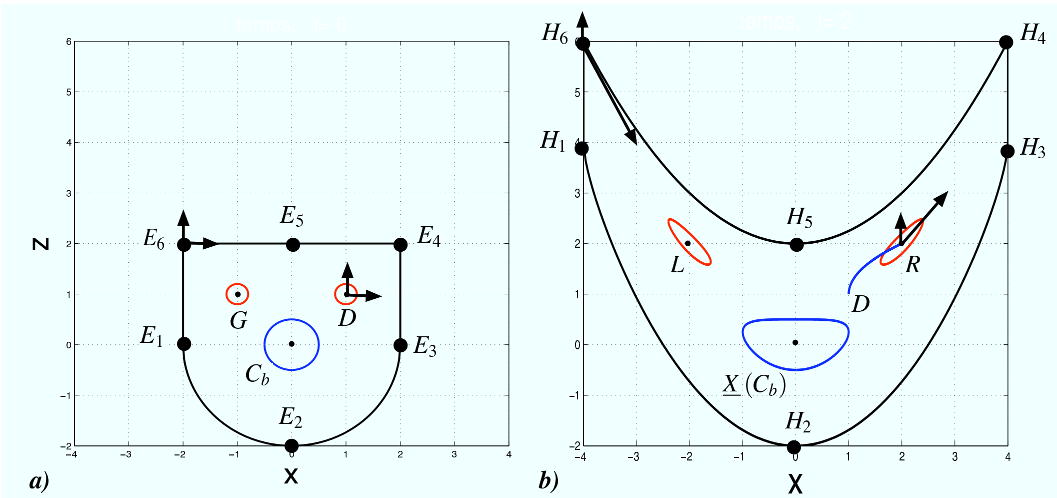

Figure 1: *a)* Ω_0 *avant déformation pour* $t = 0$, *b)* $\Omega(t_*)$ *au temps* $t_* = 2$ *s.*

de leurs images L and R est effectué sur la figure 1. **14)**Les composantes de $\underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)$ où $\underline{a} = (l/2, 0, l/2)$ sont $F_{11} = 2$, $F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{31} = 2$ et $F_{ij} = 0$ sinon. **15)**On a $\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}' = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)\underline{\delta a}'$ où $\underline{a}$ est le vecteur des composantes du point D. On a donc $\underline{\delta x} = \delta a(2, 0, -4)$ et $\underline{\delta x}' = \delta a(0, 0, 2)$. **16)**Les deux petits vecteurs $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ font un angle de $\pi/4$. L'angle de glissement est donc $\gamma_{12} = \pi/4$. **17)**Comme $l/10$ peut être considéré comme relativement petit devant l'échelle $1/\beta_0$, l'image des “yeux du chat” sont des presque des ellipses que l'on peut tracer à partir des petits vecteurs $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$. **18)**Les images successives de Ω_0 pour $t \in [0s, 8s]$ sont visibles sous forme d'animation à l'adresse `http://www.enseeiht.fr/ thual/otmmc/`. **19)**On a $\Omega(t) = \Omega_0$ pour $t = 4$ s.

Cinématique

20) Les composantes du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ sont $U_1 = \dot{k}(t)x_1/k(t)$, $U_2 = 0$ et $U_3 = \dot{\beta}(t)x_1^2/k^2(t)$. **21)**On a $B^{(L)}(\underline{a}, t) = \gamma\,[a_3 + \beta(t)\,a_1^2]^2$ pour $a_3 \geq \beta(t)\,a_1^2$ et $B^{(L)}(\underline{a}, t) = 0$ pour $a_3 \leq \beta(t)\,a_1^2$. **22)**On a $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = U_3\,\frac{\partial B}{\partial x_3} = 2\gamma\dot{\beta}(t)x_1^2\,x_3/k^2(t)$. **23)**Les composantes de $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ sont $D_{11} = \dot{k}(t)/k(t)$, $D_{13} = D_{31} = \dot{\beta}(t)x_1/k^2(t)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **24)**Les trajectoires $\underline{x}(t)$ telles que $\underline{x}(0) = \underline{a}$ sont des paraboles d'équation $x_1 = a_1 + 2\alpha(x_3 - a_3)^2/\left(\beta_0^2\,a_1^3\right)$. Le tracé de la trajectoire, d'équation $x_1 = 1 + .5[1 - \cos(\pi t/2)]$ cm et $x_3 = 1 + \sin(\pi\,t/4)$ est donc le morceau de parabole DR de la figure 1b). **25)**Le taux de dilatation div $\underline{U} = \dot{k}(t)/k(t)$ ne dépend pas du point de départ de la trajectoire. **26)**Le vecteur rotation est $\underline{\omega}(\underline{x}, t) = -\dot{\beta}(t)\,x_1/k^2(t)\,\underline{e}^{(2)}$. **27)**Les lignes de champs à $t = t_*$ sont définies par $dx_1/U_1 = dx_3/U_3$ ce qui entraîne $dx_3/dx_1 = U_3/U_1 = \dot{\beta}(t_*)x_1/\left[\dot{k}(t_*)k(t_*)\right]$ en choisissant de les paramètrer par la variable x_1. Ces lignes sont alors des paraboles d'équations $x_3 = \dot{\beta}(t_*)x_1^2/\left[2\dot{k}(t_*)k(t_*)\right] + b_3$ où b_3 est une constante. **28)**La loi de conservation de la masse s'écrit $\frac{d\rho}{dt} + \rho$ div $\underline{U} = 0$ avec div $\underline{U} = \dot{k}(t)/k(t)$. **29)**Comme $\frac{d\rho}{dt}/\rho = -\dot{k}(t)/k(t)$, on peut écrire $\frac{\partial\rho}{\partial t}^{(L)}(\underline{a}, t)/\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = -\dot{k}(t)/k(t)$ et donc $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = C/k(t)$ où C est une constante. En utilisant la condition initiale $\rho(\underline{a}, 0) = \rho_0$ et le fait que $k(0) = 1$, on obtient $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0/k(t)$. **30)**Ce résultat peut se trouver directement en remarquant que $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0\,J(\underline{a}, t)$ avec $J(\underline{a}, t) = k(t)$. **31)**On a $\mathcal{B}(0) = \int_0^l da_2 \int_{-l}^l da_1 \int_0^l \gamma a_3^2\,da_3 = \frac{2}{3}\gamma l^5$.