PARTIEL 2007

PROBLÈME 0.1 Le chat oval

On considère, dans ce problème, une longueur de référence l que l'on prendra égale à 1 cm pour les tracés graphiques. On définit le domaine Ω_0 par :

$$\Omega_0 = \left\{ \underline{a} \in I\!R^3 \text{ tel que } 0 \leq a_2 \leq l \;, \quad |a_1| \leq 5\,l \;\text{ et } |a_3| \leq f(a_1) \right\} \;,$$

avec $f(a_1) = 2\sqrt{l^2 - a_1^2/25}$.

Grandes déformations

On considère un mouvement $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$x_1 = a_1/\lambda(t), \quad x_2 = a_2 \,, \quad \text{et} \qquad x_3 = a_3\;\lambda(t) \;, \tag{1}$$

avec $\lambda(t) = 1 + \beta\, \sin(\omega\, t)$. Pour les tracés graphiques, on considérera les valeurs numériques $\beta = \sqrt{5/2} - 1 \sim 0.6$ et $\omega = \pi/8$ s^{-1}.

1) Tracer sur un même graphe les fonctions $\lambda(t)$ et $1/\lambda(t)$ en fonction du temps pour $t \in [0, 8]$ s.
2) Indiquer les extrema avec une décimale sur cet intervalle de temps.
3) Écrire l'équation que vérifie l'intersection entre le domaine Ω_0 et le plan $a_2 = 0$ sous la forme $F(a_1, a_3) = 1$. On pourra noter $l_x = 5\,l$ et $l_y = 2\,l$.
4) Tracer cette courbe.
5) Écrire l'équation de l'image de cette courbe au temps t.
6) Tracer cette image pour $t_* = 4$ s. Quelle est sa forme exacte ?
7) Calculer le tenseur des dilations $\underline{\underline{C}}(\underline{a}, t)$ pour tout point $\underline{a}$.
8) Interpréter les composantes de $\underline{\underline{C}}(\underline{0}, t)$ pour tous les temps $t \in [0, 4]$ s.
9) Calculer le rapport entre le volume de Ω_0 et celui de son image $\Omega(t)$.

Images de segments et de cercles

10) On considère $\mathcal{C}_b$ le segment défini par $a_1 \in [-l, l]$, $a_2 = 0$ et $a_3 = -l$. Dessiner le segment $\mathcal{C}_b$ dans le domaine Ω_0.
11) Quelle est la forme de son image par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$ à un temps t quelconque ? Justifier.
12) Dessiner l'image $\underline{X}(\mathcal{C}_b, t_*)$ au temps $t_* = 4$ s dans le domaine $\Omega(t_*)$.
13) On considère les points G et D dont les coordonnées $\underline{a}$ respectives sont G : $(-3\,l, 0, l)$ et D : $(3\,l, 0, l)$. Dessiner ces points dans le domaine Ω_0 ainsi que leurs images respectives L and R au temps $t_* = 4$ s dans le domaine $\Omega(t_*)$.

14) Dessiner deux petits vecteurs $\underline{\delta a} = \delta a\ \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\delta a}' = \delta a\ \underline{e}^{(3)}$ autour de G en choisissant δa quelconque. Dessiner leurs images respectives $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ autour de l'image de G au temps $t_* = 4$ s.
15) Calculer, pour le temps $t_* = 4$ s, l'angle de glissement des directions Ox_1 et Ox_3 prises autour du point G à $t = 0$ s.
16) Tracer deux petits cercles de centres respectifs G ou D et de rayon $l/2$ ansi que leurs l'images respectives au temps $t_* = 4$ s.
17) On considère les points $E_i, i = 1, 2, ..., 5$ dont les coordonnées respectives $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ sont E_1 : $[-4.5\,l, 0, f(4.5\,l)]$, E_2 : $(-4\,l, 0, 3\,l)$, E_3 : $(0, 0, 0)$, E_4 : $(4, 0, 3\,l)$ et E_5 : $[4.5\,l, 0, f(4.5\,l)]$. Tracer ces cinq points dans Ω_0.
18) Tracer schématiquement les images $H_i, i = 1, ..., 5$ de ces cinq points de coordonnées $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ au temps $t_* = 4$ s.
19) Tracer les segments qui relient E_1 à E_2, E_2 à E_3, ... jusqu'à E_5. Tracer les images de ces segments au temps $t_* = 4$ s.

Cinématique

20) Calculer le champ de vitesse eulérien $\underline{U}(\underline{x}, t)$ associé au mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ ci-dessus.
21) Donner l'expression $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la représentation lagrangienne du champ B dont la représentation eulérienne est $B(\underline{x}, t) = \gamma\, x_1\, x_3$ où γ est une constante.
22) Donner l'expression de $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t)$.
23) Calculer les tenseurs des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$.
24) Tracer la trajectoire issue du point D à $t = 0$ s jusqu'à $t = 8$ s en faisant figurer Ω_0, $\Omega(t_*)$, D et R.
25) Calculer le taux de dilation relatif $\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt}[\delta\mathcal{V}(t)]$ d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ pris autour de cette trajectoire.
26) Donner l'expression du vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, t)$.
27) Tracer les lignes de champs du champ de vitesse pour $t_* = 4$ s.
28) On note $\rho(\underline{x}, t)$ la masse volumique d'un milieu continu contenu dans le domaine $\Omega(t)$. Écrire l'équation de conservation de la masse à l'aide de la fonction $\lambda(t)$.
29) On suppose que $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est un champ homogène à $t = 0$. En déduire son expression pour tout temps.
30) Comparer ce résultat avec l'expression du jacobien $J(\underline{a}, t)$.
31) On note $\mathcal{C}(t) = \iiint_{\Omega(t)} |B(\underline{x}, t)|\ d^3x$. Calculer la dérivée $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(t)$ de cette fonction du temps.
32) En déduire la valeur de $\mathcal{C}(t)$ pour tout temps dans le cas des valeurs numériques utilisées pour les tracés graphiques.
33) Dessiner approximativement les images de Ω_0, E_i, G, D et $\mathcal{C}_b$ pour des temps successifs compris entre $t = 0$ et $t_* = 4$ s.

Corrigé page 3

Corrigé **Le chat oval**

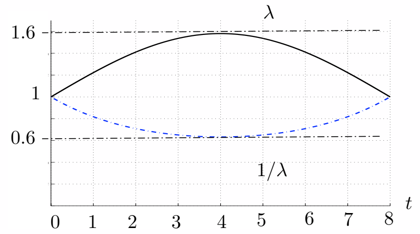

Figure 1: *Courbes $\lambda(t)$ et $1/\lambda(t)$ pour $t \in [0,4]$ s.*

1)Les tracés de $\lambda(t)$ et $1/\lambda(t)$ sont représentés sur la figure 1. **2)**Le maximum de $\lambda(t)$ est environ 1.6 et le minimum de $1/\lambda(t)$ envion 0.6. Ils sont atteints pour $t_* = 4$ s. **3)**L'équation de la frontière $\partial\Omega_0$ dans le plan $x_2 = 0$ s'écrit $F(a_1, a_3) = 1$ avec $F(a_1, a_3) = (a_1/l_x)^2 + (a_3/l_z)^2$ et $l_x = 5\,l$ et $l_z = 2\,l$. **4)**Cette courbe est une ellipse de centre $\underline{0}$, de grand axe l_x dans la direction $x = x_1$ et de petit axe l_z dans la direction $z = x_3$ —voir figure 2a). **5)**L'équation de la frontière $\partial\Omega(t)$ dans le plan $x_2 = 0$ s'écrit $(x_1/L_x)^2 + (x_3/L_z)^2$ et $L_x = l_x/\lambda(t)$ et $L_z = l_z\,\lambda(t)$. **6)**On remarque que $L_z/L_x = \lambda^2(t_*)\, l_z/l_x = 1$ puisque $\lambda^2(t_*) = 5/2$ et $l_z/l_x = 2/5$. La courbe $\partial\Omega(t)$ dans le plan $x_2 = 0$ est donc un cercle de rayon $L = l\sqrt{10} \sim 3.2\,l$ —voir figure 2b). **7)**On a $C_{11} = 1/\lambda^2(t)$, $C_{33} = \lambda^2(t)$, $C_{22} = 1$ et $C_{ij} = 0$ sinon. **8)**Le tenseur $\underline{\underline{C}}(\underline{x}, t)$ ne dépend que du temps. Les angles de glissement des directions de base sont nulles. La dilation relative est $1/\lambda(t)$ dans la direction $\underline{e}_x$, $\lambda(t)$ dans la direction $\underline{e}_z$ et 1 dans le direction $\underline{e}_y$. **9)**Comme $J(\underline{a}, t) = 1$ pour tout $\underline{a}$ et tout t, on peut écrire $\iiint_{\Omega(t)} d^3x = \iiint_{\Omega_0} J(\underline{a}, t)\, da^3 = \iiint_{\Omega_0} da^2$. Le rapport des volumes de $\Omega(t)$ et Ω_0 est donc égal à l'unité.

Images de segments et de cercles

10) Le dessin du segment $\mathcal{C}_b$ est représenté sur la figure 2a). **11)**La déformation $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{\underline{F}}(t)\,\underline{a}$ est linéaire. L'image d'un segment de droite est donc un segment de droite. On peut aussi le voir en écrivant l'équation du segment de droite $\underline{C}_b$ et de son image. **12)**Pour tracer l'image des extrémités, il suffit de multiplier leurs abscisses a_1 pour $1/\lambda(t_*) \sim 0.6$ et leurs ordonnées a_3 par $\lambda(t_*) \sim 1.6$. Le dessin du segment $\underline{X}(\mathcal{C}_b, t_*)$ est représenté sur la figure 2b). **13)**Les points G et D sont représentés sur la figure 2a), leurs images L et R sur la figure 2b). **14)**On a $\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta x}' = \underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_*)\underline{\delta a}'$ où $\underline{a}$ est le vecteur des composantes du point D. On a donc $\underline{\delta x} = \delta a[1/\lambda(t_*), 0, 0] \sim \delta(0.6, 0, 0)$ $\underline{\delta x}' = \delta a(0, 0, 1.6)$. **15)**Les deux petits vecteurs $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ font un angle de $\pi/2$. L'angle de glissement est donc $\gamma_{13} = 0$. **16)**L'image d'un cercle de rayon r_0 au temps $t = t_*$ est une ellipse dont le petit axe est $r_0/\lambda(t_*)$ dans la direction x et le grand axe est $r_0\lambda(t_*)$ dans la direction z. On en déduit le tracé des petits cercles et de leur image (figure 2). **17)**Voir la figure 2a). **18)**Voir la figure 2b). **19)**L'image d'un segment est un segment car la déformation est linéaire. Il suffit donc de relier les points H_i.

Cinématique

20) Les composantes du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ sont $U_1 = -x_1\ \dot\lambda(t)/\lambda(t)$, $U_2 = 0$ et $U_1 = x_3\ \dot\lambda(t)/\lambda(t)$. **21)**On a $B^{(L)}(\underline{a}, t) = \gamma\, a_1\, a_3$. **22)**On a $\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = 0$. **23)**Les composantes de $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$ sont $D_{11} = -\dot\lambda(t)/\lambda(t)$, $D_{33} = \dot\lambda(t)/\lambda(t)$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **24)**Les trajectoires $\underline{x}(t) = [a_1/\lambda(t), a_2, a_3\,\lambda(t)]$ telles que $\underline{x}(0) = \underline{a}$ sont situées sur des hyperboles d'équations $x_1\,x_3 = a_1\,a_3$ et $x_2 = a_2$ — voir figure 2b). **25)**On a div $\underline{U} = \text{tr}\ \underline{\underline{D}} = 0$. Le mouvement est isochore et $\delta\mathcal{V}(t)$ reste donc constant. **26)**Comme $\underline{\underline{K}}$ est symétrique, on a $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$ et $\underline{\omega} = \underline{0}$. **27)**À $t_* = 4$ s le champ de vitesse est nul. Les lignes de champs sont des points. **28)**Comme div $\underline{U} = 0$, on a $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot\lambda}{\lambda}\,x_1\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\dot\lambda}{\lambda}\,x_3\frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$. **29)**La relation $\frac{d\rho}{dt} = 0$ entraine que ρ est constant le long des trajetoires. En utilisant la condition initiale $\rho(\underline{a}, 0) = \rho_0$ on obtient $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$. **30)**Ce résultat peut se trouver directement en remarquant que $\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0\, J(\underline{a}, t)$ avec $J(\underline{a}, t) = 1$. **31)**Comme $\frac{dB}{dt} = 0$ et div $\underline{U} = 0$, on a $\frac{d}{dt}\mathcal{C}(t) = 0$. **32)**Comme $\Omega(t_*)$ est un cercle de rayon $L = l\,\sqrt{10}$ dans le plan $x_2 = 0$, on obtient, par symétrie, que $\mathcal{C}(t_*) = 4\,\gamma\, l\int_0^L\int_0^{\pi/2} r^3\,\sin\theta\,\cos\theta\, d\theta\, dr = \gamma\, l\, L^4/2 = 50\,\gamma\, l^5$. Comme $\mathcal{C}(t)$ est constant, on a donc $\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}(t_*)$. **33)**Les images successives de Ω_0 pour $t \in [0s, 8s]$ sont visibles sous forme d'animation à l'adresse `http://thual.perso.enseeiht.fr/otmmc/`.

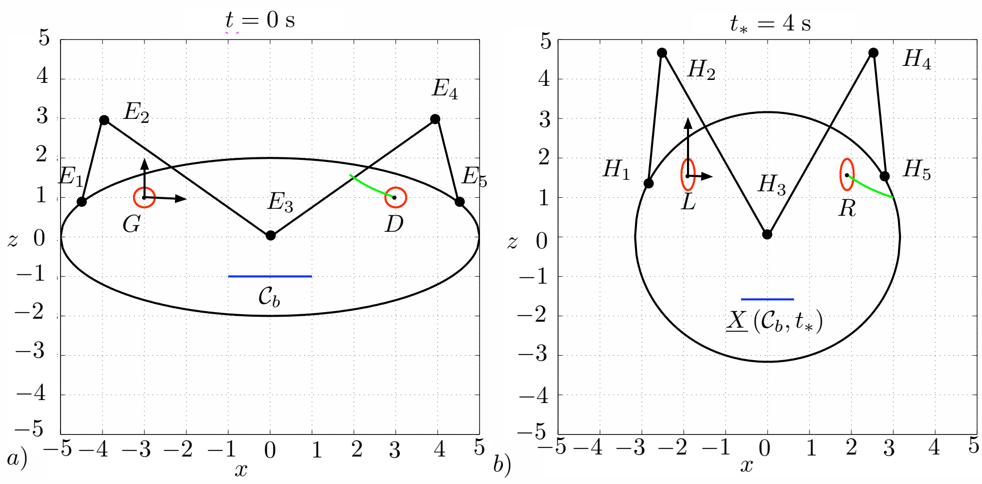

Figure 2: *a)* Ω_0 *avant déformation pour* $t = 0$, *b)* $\Omega(t_*)$ *au temps* $t_* = 4$ *s.*