PARTIEL 2008

PROBLÈME 0.1 Challoween

On considère, dans ce problème, une longueur de référence l que l'on prendra égale à 2 cm pour les tracés graphiques. On définit les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et K définis par leurs coordonnées $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ respectivement égales à $\underline{a}_A = (-3l, 0, 0)$, $\underline{a}_B = (-2l, 0, l)$, $\underline{a}_C = (-l, 0, 0)$, $\underline{a}_D = (0, 0, l)$, $\underline{a}_E = (l, 0, l)$, $\underline{a}_F = (2l, 0, 0)$, $\underline{a}_G = (3l, 0, l)$, $\underline{a}_H = (-\frac{3}{2}l, 0, -l)$, $\underline{a}_I = (\frac{3}{2}l, 0, -l)$, $\underline{a}_J = (0, 0, -2l)$ et $\underline{a}_K = (0, 0, -3l)$.

Pumpkin head

1) Tracer la ligne brisée $ABCDEFG$ (segments de droites réliés à leurs extrémités). Tracer le demi-cercle passant par les points G, K et A.
2) On note $\mathcal{A}_0$ l'aire comprise entre le demi-cercle et la ligne brisée, et Ω_0 le cylindre de section $\mathcal{A}_0$ et de profondeur L dans la direction de son axe Oa_3. Exprimer le volume V_0 du domaine Ω_0.
3) On considère les petits vecteurs $\underline{\delta a} = (l/2, 0, 0)$ et $\underline{\delta a}' = (0, 0, l/2)$. Tracer les carrés passant par les points de coordonnées $\underline{a}_I + \underline{\delta a}$, $\underline{a}_I + \underline{\delta a}'$, $\underline{a}_I - \underline{\delta a}$ et $\underline{a}_I - \underline{\delta a}'$. Mêmes questions en remplaçant $\underline{a}_I$ par $\underline{a}_H$ puis par $\underline{a}_J$.

Treat or Trig

On considère le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$x_1 = \alpha(t)\, a_1 \ , \quad x_2 = a_2 \ , \quad \text{et} \quad x_3 = a_3 + 4\, l\, [1 - \alpha(t)]\, \sin^2(k\, a_1) \ , \qquad (1)$$

avec $\alpha(t) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\omega\, t)$ et $k = \frac{\pi}{6\, l}$. On note $t_m = \frac{\pi}{2\, \omega}$.

4) Tracer la fonction $f(\tau) = \frac{3+\cos\tau}{4}$ pour $\tau \in [0, 2\,\pi]$. En déduire la tracé de la fonction $\alpha(t)$ pour $t \in [0, 2\, t_m]$.
5) Tracer la fonction $g(a_1) = \sin^2(k a_1)$ en fonction pour $a_1 \in [0, 3\, l]$.
6) Montrer que les trajectoires du mouvement sont situées sur les droites $\Delta(\underline{a})$ d'équations $x_2 = a_2$ et $x_3 = a_3 + Z(a_1) - \lambda(a_1)\, x_1$ où $Z(a_1)$ et $\lambda(a_1)$ sont des fonctions que l'on exprimera à l'aide de $g(a_1)$. On supposera que $a_1 \neq 0$.
7) Calculer $Z(a_1)$ pour $a_1 \in \{0, l, \frac{3}{2}l, 2l, 3l\}$. En déduire le tracé des droites $\Delta(\underline{a}_E)$, $\Delta(\underline{a}_I)$, $\Delta(\underline{a}_F)$ et $\Delta(\underline{a}_G)$.

Scream

On s'intéresse à la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ entre la configuration de référence Ω_0 pour $t = 0$ et la configuration déformée $\Omega(t_m)$ pour $t = t_m$.

8) Tracer les images E', F' et G' des points E, F et G par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$.
9) Donner l'expression de $\underline{\underline{F}}(\underline{a}, t_m)$ aux points I, J et H.
10) Tracer la trajectoire reliant le point I et son image I' par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$.
11) Calculer l'image par $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ des deux petits vecteurs $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a}'$ pris autour du point I. On supposera que la longueur de ces deux petits vecteurs peut-être considérée comme infinitésimale. Même question en remplaçant I par J.
12) Déduire des deux questions précédentes le tracé sur $\Omega(t_m)$ des images des trois carrés tracés précédemment sur Ω_0 autour des points H, I et J.
13) Calculer $\underline{\underline{F}}(\underline{a}_K, t_m)\, \underline{e}^{(1)} \wedge \underline{e}^{(1)}$ et $\underline{\underline{F}}(\underline{a}_G, t_m)\, \underline{e}^{(3)} \wedge \underline{e}^{(3)}$. En déduire les pentes respectives de l'image du demi-cercle AKG par $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ aux voisinages des images respectives K' et G' de K et G.
14) Déduire des questions précédentes une approximation du tracé de l'intersection $\mathcal{A}(t_m)$ de $\Omega(t_m)$ avec le plan Ox_1x_3.
15) Calculer le volume V du domaine déformé $\Omega(t_m)$.

Vitesses

16) Donner l'expression de la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ de la vitesse pour toute particule $\underline{a}$ de la configuration de référence Ω_0.
17) Donner l'expression de la déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$.
18) Calculer la représentation eulérienne du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$.
19) Calculer la représentation eulérienne du champ d'accélération $\underline{\Gamma} = \frac{d}{dt}\underline{U}(\underline{x}, t)$.
20) Donner l'expression du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$.
21) Écrire la loi de conservation de la masse en représentation eulérienne en notant $\rho(\underline{x}, t)$ le champ de masse volumique et en faisant apparaître la fonction $\alpha(t)$ et sa dérivée $\alpha'(t)$.
22) On suppose que $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est une constante. En déduire $\rho(\underline{x}, t)$.

Théorème de Reynolds

23) En utilisant la loi de conservation de la masse, exprimer le champ $B(\underline{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, \phi) + \text{div}\, (\rho\, \phi\, \underline{U})$ en fonction des champs ρ et $\frac{d\phi}{dt}$ où $\rho(\underline{x}, t)$ est la masse volumique et $\phi(\underline{x}, t)$ un champ quelconque.
24) En déduire un expression simple de la quantité $\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$ où $\mathcal{D}(t)$ est une domaine transporté par le mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$ avec $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho\, \phi\, dx^3$.
25) On suppose que $\rho \frac{d}{dt}\phi = -\text{div}\, (\underline{Q}_c)$ où $\underline{Q}_c$ est un champ dérivable. Comment varie $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$ si $\underline{Q}_c \cdot \underline{n} = 0$ pour tout temps t et pour tout point $\underline{x}$ de la frontière mobile $\partial\mathcal{D}(t)$ de normale $\underline{n}(\underline{x}, t)$.

Corrigé page 3

Corrigé

Les images successives de Ω_0 pour $t \in [0, 2t_m]$ sont visibles sous forme d'animation à l'adresse `http://thual.perso.enseeiht.fr/otmmc/`.

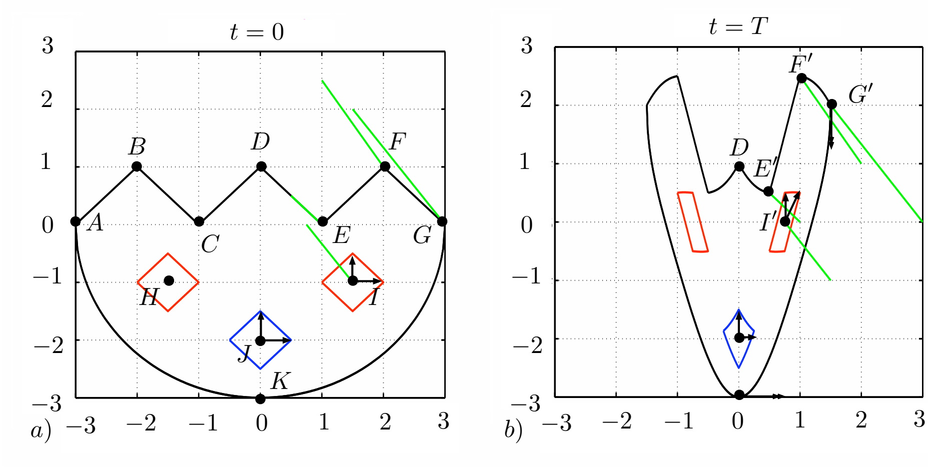

Figure 1: *a)* Ω_0 à $t = 0$, *b)* $\Omega(t)$ à $t = t_m$.

Pumpkin head

1)La figure 1a) fait apparaître une tête de citrouille. **2)**L'aire comprise entre l'axe Oa_1 et la ligne brisée est $3l^2$. L'aire comprise en l'axe Oa_1 et le demi-cercle est $9\pi l^2/2$. On a donc $V_0 = 3Ll^2(1 + 3\pi/2)$. **3)**Les carrés de la figure 1a) font apparaître les yeux et la bouche de la citrouille.

Treat or Trig

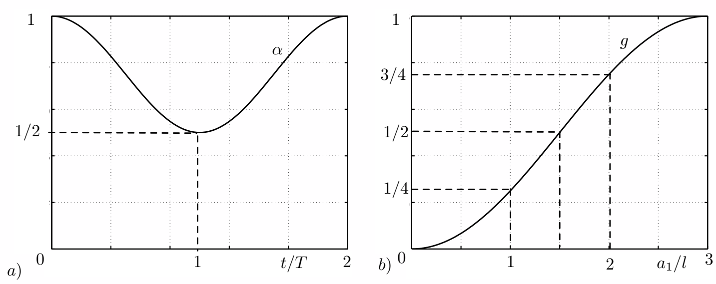

Figure 2: *a) Fonction* $\alpha(t)$ *b) Fonction* $g(a_1)$.

4)Comme $\alpha(t) = f(\omega t)$, le tracé de $\alpha(t)$, représenté sur la figure 2a) pour $t/t_m \in [0, 2]$, a la même allure que celui de $f(\tau)$ pour $\tau \in [0, 2\pi]$. **5)**Le tracé de $g(a_1)$ est représenté sur la figure 2b) pour $a_1 \in [0, 3l]$. **6)**En éliminant $\alpha(t)$ entre les équations $x_1 = X_1(a_1, t)$ et $x_3 = X_3(a_1, a_3, t)$, on obtient $x_3 = a_3 + Z(a_1) - \lambda(a_1)\, x_1$ avec $Z(a_1) = 4lg(a_1)$ et $\lambda(a_1) = -4lg(a_1)/a_1$. **7)**Comme $g(a_1) \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ pour $a_1 \in \{0, l, \frac{3}{2}l, 2l, 3l\}$ respectivement, on a $Z(a_1) \in \{0, l, 2l, 3l, 4l\}$. On en déduit le tracé des droites $\Delta(\underline{a}_E)$, $\Delta(\underline{a}_I)$, $\Delta(\underline{a}_F)$ et $\Delta(\underline{a}_G)$ dont une partie seulement est représentée sur la figure 1.

Scream

8)Comme $\alpha(T) = 1/2$, les points E', F' et G' sont, respectivement, les points des droites $\Delta(\underline{a}_E)$, $\Delta(\underline{a}_F)$ et $\Delta(\underline{a}_G)$ dont les abscisses sont respectivement égales à la moitié des abscisses de E, F et G. **9)**Les composantes de la Jacobienne $\underline{\underline{F}}(\underline{a}, t)$ sont $F_{11} = \alpha(t)$, $F_{22} = F_{33} = 1$, $F_{31} = 4kl[1 - \alpha(t)] \sin(2ka_1)$ et $F_{ij} = 0$ sinon. Comme $\alpha(t_m) = 1/2$, on a $F_{31}(\underline{a}, t_m) = 2kl \sin(2ka_1) = 2kl = \pi/3$ pour $a_1 = \pm 3l/2$ et $F_{31}(\underline{a}, t_m) = 2kl \sin(2ka_1) = 0$ pour $a_1 = 0$, on peut écrire

$$\underline{\underline{F}}(\underline{a}_I, t_m) = \underline{\underline{F}}(\underline{a}_J, t_m) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pi/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{F}}(\underline{a}_K, t_m) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

10) La trajectoire II' est un segment de droite sur la droite $\Delta(\underline{a}_I)$. L'abscisse de I' est la moitié de celle de I. **11)**En supposant que l'on peut considérer $\underline{\delta a}$ et $\underline{\delta a}'$ comme des petits vecteurs pris autour de I, leurs images respectives sont les petits vecteurs $\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}_I, t_m)\, \underline{\delta a} = \frac{\delta l}{2}(1/2, 0, \pi/3) \sim \frac{\delta l}{2}(.5, 1.05)$ et $\underline{\delta x}' = \underline{\underline{F}}(\underline{a}_I, t_m)\, \underline{\delta a}' = \frac{\delta l}{2}(0, 0, 1)$. **12)**A l'aide des petits vecteurs $\underline{\delta x}$ et $\underline{\delta x}'$ de la question précédente, on peut tracer les petits losanges qui approximent les images respectives des yeux et de la bouche. **13)**Comme $\underline{\underline{F}}(\underline{a}_K)\underline{e}^{(1)} = \alpha(t_m)\underline{e}^{(1)} = \frac{1}{2}\underline{e}^{(1)}$, on a $\underline{\underline{F}}(\underline{a}_K, t_m)\underline{e}^{(1)} \wedge \underline{e}^{(1)} = \underline{0}$. L'image du demi-cercle par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ est une courbe de pente nulle en $K' = K$. Comme $\underline{\underline{F}}(\underline{a}_G)\underline{e}^{(1)} = \alpha(t_m)\underline{e}^{(3)} = \frac{1}{2}\underline{e}^{(3)}$, on a $\underline{\underline{F}}(\underline{a}_G, t_m)\underline{e}^{(3)} \wedge \underline{e}^{(3)} = \underline{0}$. L'image du demi-cercle par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ est une courbe de pente infinie en G'. **14)**On peut relier par des segments de droites les images A', B', C', $D' = D$, E', F' et G' pour approximer l'image de la ligne brisée $ABCDEF$. En tenant compte de ses pentes respectives en K et G', on peut alors en faire un tracé approximatif de l'image du demi-cercle et comparer avec la courbe exacte de la figure 1b). **15)**On a $J(\underline{a}, t_m) = \alpha(t_m) = 1/2$. On a donc

$$V = \iiint_{\Omega(T)} dx^3 = \iiint_{\Omega_0} J(\underline{a}, t_m)\, da^3 = V_0/2\ . \tag{3}$$

Vitesses

16) La représentation lagrangienne de la vitesse est $U_1^{(L)}(\underline{a}, t) = a_1\, \alpha'(t)$, $U_2^{(L)}(\underline{a}, t) = 0$ et $U_3^{(L)}(\underline{a}, t) = -4\, l\, \alpha'(t)\, \sin^2(k\, a_1)$ avec $\alpha'(t) = -\omega\, \sin(2\, \omega\, t)/2$. **17)**La déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ de $\underline{X}(\underline{a}, t)$ s'écrit $a_1 = x_1/\alpha(t)$, $a_2 = x_2$ et $a_3 = x_3 - 4\, l\, [1 - \alpha(t)]\, \sin^2 \left[\frac{k\, x_1}{\alpha(t)}\right]$. **18)**La représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est

$U_1(\underline{x},t) = x_1 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$, $U_2(\underline{x},t) = 0$ et $U_3(\underline{x},t) = -4\,l\,\alpha'(t)\,\sin^2\left[\frac{k\,x_1}{\alpha(t)}\right]$. **19)**La représentation lagrangienne du champ $\underline{\Gamma} = \frac{d}{dt}\underline{U}$ est $\underline{\Gamma}^{(L)}(\underline{a},t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{X}(\underline{a},t) = \alpha''(t)\,a_1\,\underline{e}^{(1)} - 4\,l\,\alpha''(t)\,\sin^2(k\,a_1)\,\underline{e}^{(3)}$. On en déduit sa représentation eulérienne $\underline{\Gamma}(\underline{x},t) = x_1 \frac{\alpha''}{\alpha}(t)\,\underline{e}^{(1)} - 4\,l\,\alpha''(t)\,\sin^2\left[\frac{k\,x_1}{\alpha(t)}\right]\underline{e}^{(3)}$. **20)**On a $D_{11} = \alpha'(t)/\alpha(t)$, $D_{13} = D_{31} = -2\,l\,k\,\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\,\sin\left[\frac{2\,k\,x_1}{\alpha(t)}\right] = -\frac{\pi}{3}\,\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\,\sin\left[\frac{2\,k\,x_1}{\alpha(t)}\right]$ et $D_{ij} = 0$ sinon. **21)**On a $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\,\rho = -\rho\,\text{div}\,\underline{U} = -\rho\,\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$. **22)**La loi de conservation de la masse en représentation lagrangienne s'écrit $\rho^{(L)}(\underline{a},t)\,J(\underline{a},t) = \rho_0$. Comme $J(\underline{a},t) = \alpha(t)$, on en déduit $\rho(\underline{x},t) = \rho_0/\alpha(t)$. **23)**

Théorème de Reynolds

24) On $B = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\phi) + \text{div}\,(\rho\,\phi\,\underline{U}) = \rho\,\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \phi\,\text{div}\,(\rho\,\underline{U}) + \rho\,\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\,\phi = \rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\,\phi\right) = \rho\,\frac{d\phi}{dt}$ en utilisant la loi de conservation de la masse $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\,\underline{U}) = 0$. **25)**On en déduit que
$\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\phi) + \text{div}\,(\rho\,\phi\,\underline{U})\right]dx^3 = \iiint_{\mathcal{D}(t)}\rho\,\frac{d\phi}{dt}\,dx^3$. **26)**En appliquant le théorème de la divergence, on peut écrire $\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}}\text{div}\,(\underline{Q}_c)\,dx^3 = \iint_{\partial\mathcal{D}}\underline{Q}_c\cdot\underline{n}\,dS = 0$. On en déduit que $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$ est constant.