

PARTIEL 2009

PROBLÈME 0.1 Chabouille

On considère, dans ce problème, une longueur de référence l que l'on prendra égale à 1 cm pour les tracés graphiques. On considère les points $O, A, B, C, D, E, F, G, H, I$, et J définis par leurs coordonnées $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ respectivement égales à $\underline{a}_O = (0, 0, 0)$, $\underline{a}_A = (-4l, 0, 0)$, $\underline{a}_B = (-6l, 0, 2l)$, $\underline{a}_C = (6l, 0, 2l)$, $\underline{a}_D = (4l, 0, 0)$, $\underline{a}_E = (-l, 0, -2.5l)$, $\underline{a}_F = (0, 0, -2l)$, $\underline{a}_G = (l, 0, -2.5l)$, $\underline{a}_H = (0, 0, -3l)$, $\underline{a}_I = (-2l, 0, 0)$, et $\underline{a}_J = (2l, 0, 0)$.

Tracé de tête

- 1) Dans le plan $a_2 = 0$, tracer le cadre carré \mathcal{C} défini par $|a_1| \leq 6l$ et $-8l \leq a_3 \leq 4l$. Dans ce cadre, tracer la ligne brisée $ABCD$ (segments de droites reliés à leurs extrémités) et le demi-cercle de centre O et de rayon $4l$ qui passe par les points A et D avec $a_3 \leq 0$.
- 2) On note \mathcal{A}_0 la surface comprise entre le demi-cercle et la ligne brisée, et Ω_0 le cylindre de section \mathcal{A}_0 et de profondeur l dans la direction de son axe Oa_2 . Exprimer le volume V_0 du domaine Ω_0 en fonction de l .
- 3) Tracer, sur la même figure, les cercles de rayon $l/2$ et de centres respectifs I et J . Tracer le losange $EF GH$.

Mise en mouvement

On considère le mouvement $\underline{X}(\underline{a}, t)$ défini par

$$x_1 = a_1 [1 - \beta(t) a_3] , \quad x_2 = a_2 \quad \text{et} \quad x_3 = [1 + 3\beta(t) l] a_3 , \quad (1)$$

avec $\beta(t) = \sin(\omega t)/(3l)$. On note $t_m = \pi/(2\omega)$ et $\Omega(t) = \underline{X}(\Omega_0, t)$.

- 4) Tracer la fonction $\beta(t)$ pour $t \in [0, 2t_m]$. Calculer $\beta(0)$ et $\beta(t_m)$.
- 5) Décrire les trajectoires issues des points A, D, I et J .
- 6) Exprimer la différentielle $\underline{F}(\underline{a}, t)$ de $\underline{X}(\underline{a}, t)$ pour tout \underline{a} et tout t .
- 7) Montrer que les trajectoires du mouvement sont situées sur les droites $\Delta(\underline{a})$ d'équations $x_2 = a_2$ et $x_1 = a_1 + \Lambda(a_1, a_3) - \lambda(a_1) x_3$ où $\Lambda(a_1, a_3)$ et $\lambda(a_1)$ sont des fonctions que l'on exprimera.
- 8) Calculer $\Lambda(a_1, a_3)$ et $\lambda(a_1)$ pour $a_1 = 6l$ et $a_3 = 2l$ et indiquer l'équation de la droite $\Delta(\underline{a}_C)$. On note C' l'image de C pour $t = t_m$. Tracer la trajectoire CC' sur la figure de cadre \mathcal{C} .
- 9) Calculer le rapport $\delta\mathcal{V}(t)/\delta\mathcal{V}_0$ d'un petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement autour de la trajectoire issue de I et qui vaut $\delta\mathcal{V}_0$ à $t = 0$.
- 10) Montrer que $a_3 < 3l$ pour tout point \underline{a} de Ω_0 . En déduire que $J(\underline{a}, t) > 0$ pour tout point $\underline{a} \in \Omega_0$ et tout temps $t \in [0, 2t_m]$.

Description lagrangienne

On s'intéresse ici à la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ entre la configuration de référence Ω_0 et la configuration déformée $\Omega(t_m)$ au temps $t = t_m$.

- 11) Tracer, dans un nouveau cadre \mathcal{C} , les images respectives B', C', E', F', G' et H' de B, C, E, F et H par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$ au temps $t = t_m$. Déterminer les images de A, D, I et J et les tracer.
- 12) Tracer l'image du segment de droite BC par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$.
- 13) Exprimer le tenseur des dilatations $\underline{C}(\underline{a}, t_m)$ pour tout point \underline{a} .
- 14) Calculer la dilatation relative Λ_1 dans la direction $\underline{e}^{(1)}$ et le sinus de l'angle de glissement $\sin \gamma_{13}$ des directions $\underline{e}^{(1)}$ et $\underline{e}^{(3)}$ au temps $t = t_m$ pour tout point \underline{a} .
- 15) On considère le petit vecteur $\delta \underline{a} = \delta a [\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}]$ pris autour du point D . Tracer l'image $\delta \underline{x}$ de ce petit vecteur autour de l'image du point D pour la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$.
- 16) On considère la frontière $\partial\Omega(t_m)$ de $\Omega(t_m)$. Tracer les tangentes de $\partial\Omega(t_m)$ autour de l'image du point D dans le plan $x_2 = 0$.
- 17) En déduire un tracé approximatif de $\partial\Omega(t_m)$ en supposant que ce tracé reste dans le cadre carré \mathcal{C} de la figure.

Description eulérienne

- 18) Calculer la représentation lagrangienne $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ de vitesse.
- 19) Calculer la déformation inverse $\underline{A}(\underline{x}, t)$ et montrer qu'elle est bien définie pour tout point $\underline{x} \in \Omega(t)$ pour $t \in [0, 2t_m]$. On pourra noter $\alpha(t) = [1 + 3\beta(t)l]^{-1}$.
- 20) En déduire la représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t)$ du champ de vitesse.
- 21) Exprimer $\underline{U}(\underline{x}, t_m)$ puis $\underline{U}(\underline{x}, 0)$.
- 22) On considère le champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x}, t) = \cos(\omega t) \underline{x}$. Calculer la dérivée particulière $\frac{d}{dt} \underline{V}(\underline{x}, 0)$ de ce champ au temps $t = 0$.
- 23) Calculer le vecteur rotation $\underline{\omega}(\underline{x}, 0)$ au temps $t = 0$.
- 24) Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{D}(\underline{x}, 0)$ pour $t = 0$.
- 25) Décrire le lieu des points pour lesquels $\underline{U}(\underline{x}, 0) = \underline{0}$ au temps $t = 0$ puis tracer les lignes de champs de $\underline{U}(\underline{x}, 0)$ dans le plan $x_1 = 0$. Tracer les lignes de champs de $\underline{U}(\underline{x}, 0)$ dans Ω_0 en distinguant les cas $x_3 > 0$ et $x_3 < 0$. Représenter schématiquement les vecteurs vitesse sur ces lignes.
- 26) Effectuer un tracé approximatif de l'image du losange $EFGH$ et des deux cercles de rayons $l/2$ et de centres respectifs I et J par la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t_m)$.
- 27) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de $\underline{D}(\underline{x}_I, 0)$ autour du point I de coordonnées $\underline{x}_I = \underline{a}_I$. Tracer ces directions propres et indiquer schématiquement les déformations d'un petit cercle de centre I au voisinage du temps $t = 0$.

Corrigé	Chabouille
---------	------------

Les images successives de Ω_0 pour $t \in [0, t_m]$ sont visibles sous forme d'animation à l'adresse <http://thual.perso.enseeiht.fr/otmmc/>.

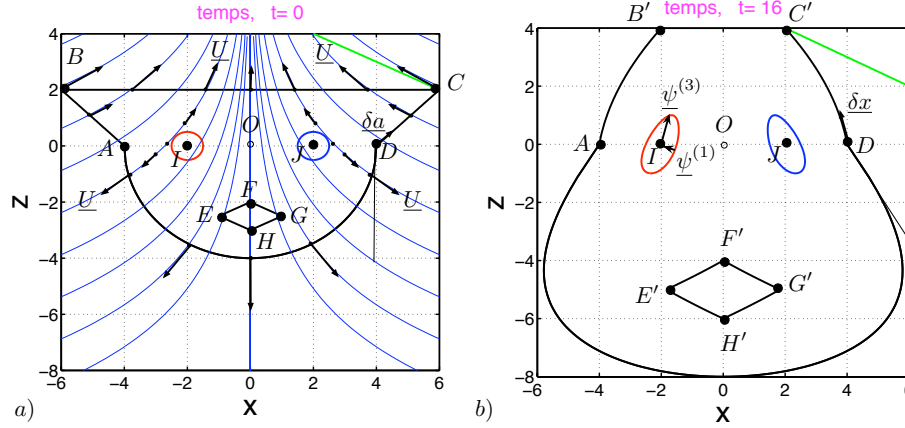


Figure 1: a) Ω_0 à $t = 0$, b) $\Omega(t)$ à $t = t_m$. Lignes de champ, trajectoire, ...

Tracé de tête

1) La figure 1a fait apparaître une tête de chat à l'intérieur du cadre \mathcal{C} . 2) Le volume est $V_0 = 4l^3(2\pi + 5)$. 3) Le tracé des cercles et du losange font apparaître les yeux et la bouche du chat.

Mise en mouvement

4) La fonction $\beta(t)$ est une demi-sinusoïde sur l'intervalle $[0, 2t_m]$ avec $\beta(0) = 0$ et $\beta(t_m) = 1/(3l)$. 5) Les trajectoires issues des points situés dans le plan $x_3 = 0$, auquel appartiennent les points A, D, I et J , sont réduites à des points. En effet, on a $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{a}$ pour ces points. 6) Comme $\beta(t)a_3 = (x_3 - a_3)/(3l)$ on a $x_1 = a_1 - a_1(x_3 - a_3)/(3l) = a_1 - \Lambda(a_1, a_3) - \lambda(a_1)x_3$ avec $\Lambda(a_1, a_3) = a_1 a_3/(3l)$ et $\lambda(a_1) = a_1/(3l)$. 7) On a $\Lambda(6l, 2l) = 4l$ et $\lambda(6l) = 2l$. Les coordonnées de C' sont $\underline{a}_{C'} = (2l, 0, 4l)$. La trajectoire CC' est un segment de droite qui appartient bien à la droite $\Delta(\underline{a}_{C'})$ d'équation $x_1 = 10l - 2x_3$ et $x_2 = 0$. 8) On a $F_{11} = 1 - \beta(t)a_3$, $F_{13} = -\beta(t)a_1$, $F_{22} = 1$, $F_{33} = 1 + 3\beta(t)l$ et $F_{ij} = 0$ sinon. 9) On a $\delta\mathcal{V}(t)/\delta\mathcal{V}_0 = J(\underline{a}_I, t) = \det \underline{F}(\underline{a}_I, t) = 1 + 3\beta(t)l = 1 + \sin(\omega t)$. 10) Par construction de Ω_0 , on a $a_3 \leq 2l < 3l$. On en déduit $J(\underline{a}, t) = [1 - \sin(\omega t)a_3/(3l)][1 + \sin(\omega t)] > 0$ pour $t \in [0, 2t_m]$.

Description lagrangienne

11) La figure 1b représente les positions de B', C', E', F', G' et H' de coordonnées respectives $(-2l, 0, 4l)$, $(2l, 0, 4l)$, $(-\frac{11}{6}l, 0, -5l)$, $(0, 0, -4l)$, $(\frac{11}{6}l, 0, -5l)$ et $(0, 0, -6l)$. Les points A, D, I et J sont invariants par les déformations. 12) L'image de la droite $a_3 = 2l$ et $a_2 = 0$ est la droite

$x_1 = a_1/3$ et $x_3 = 4l$ où a_1 est la première coordonnée d'un point a de cette droite. Si $a_1 \in [-6l, 6l]$ comme c'est le cas pour le segment BC , on a $x_1 \in [-2l, 2l]$. L'image du segment BC est donc le segment $B'C'$. **13)** On a $C_{11} = [1 - a_3/(3l)]^2$, $C_{13} = C_{31} = -[1 - a_3/(3l)] a_1/(3l)$, $C_{22} = 1$, $C_{33} = 4 + a_1^2/(9l^2)$ et $C_{ij} = 0$ sinon. **14)** On a $\Lambda_1 = \sqrt{C_{11}} = 1 - a_3/(3l)$ puisque $a_3 < 3l$ sur le domaine Ω_0 . On a $\sin \gamma_{13} = C_{13}/\sqrt{C_{11} C_{33}} = -a_1/\sqrt{a_1^2 + 36l^2}$. **15)** Pour $t = t_m$, on a $F_{11} = 1 - a_3/(3l)$, $F_{13} = -a_1/(3l)$, $F_{22} = 1$, $F_{33} = 2$ et $F_{ij} = 0$ sinon. L'image de $\underline{\delta a}$ par $\underline{X}(a, t_m)$ est $\underline{\delta x} = \underline{F}(a_D, t_m) \underline{\delta a} = \delta a \left(-\frac{1}{3} \underline{e}^{(1)} + 2 \underline{e}^{(3)} \right)$. **16)** La tangente à la courbe DC' image du segment DC est dans la direction du petit vecteur $\underline{\delta x}$ que l'on vient de calculer. En choisissant maintenant $\underline{\delta a} = -\delta a \underline{e}^{(3)}$, on calcule $\underline{\delta x} = \underline{F}(a_D, t_m) \underline{\delta a} = \delta a \left(\frac{4}{3} \underline{e}^{(1)} - 2 \underline{e}^{(3)} \right)$. **17)** En remarquant que l'image du point $(0, 0, -4l)$ est le point $(0, 0, -8l)$ et en utilisant la symétrie $(a_1, a_3) \rightarrow (-a_1, a_3)$ de la déformation, on obtient, en tenant compte des tangentes au point D , le tracé de la figure 1b.

Description eulérienne

18) En utilisant $\underline{U}^{(L)}(a, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{X}(a, t)$, on obtient $U_1^{(L)} = -\beta'(t) a_1 a_3$, $U_2^{(L)} = 0$ et $U_3^{(L)} = 3\beta'(t) l a_3$ avec $\beta'(t) = \omega \cos(\omega t)$. **19)** On a $a_3 = \alpha(t) x_3$, $a_1 = \frac{x_1}{1 - \alpha(t)\beta(t)x_3}$ et $a_2 = x_2$ avec $\alpha(t) = \frac{1}{1 + 3\beta(t)l}$. Comme $J(a, t) > 0$ pour tout $a \in \Omega_0$ et tout temps $t \in [0, 2t_m]$, la déformation $\underline{X}(a, t)$ est inversible et donc $\underline{A}(x, t)$ existe. **20)** En utilisant $\underline{U}(x, t) = \underline{U}^{(L)}[\underline{A}(x, t), t]$, on a $U_1 = -\frac{\beta'(t)\alpha(t)x_1x_3}{1 - \alpha(t)\beta(t)x_3}$, $U_2 = 0$ et $U_3 = 3\beta'(t)l\alpha(t)x_3$. **21)** On a $\underline{U}(x, t_m) = \underline{0}$ car $\beta'(t_m) = 0$. On a $\underline{U}(x, 0) = -\frac{\omega}{3l} x_1 x_3 \underline{e}^{(1)} + \omega x_3 \underline{e}^{(3)}$ car $\beta'(0) = \frac{\omega}{3l}$. **22)** On a $\frac{d}{dt} \underline{V}(x, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{V} + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{V} + U_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \underline{V} \right) (x, 0) = -\frac{\omega}{3l} x_1 x_3 \underline{e}^{(1)} + \omega x_3 \underline{e}^{(3)}$. On remarque que $\frac{d}{dt} \underline{V}(x, 0) = \underline{U}(x, 0)$. **23)** Pour $t = 0$, on a $K_{11} = -\frac{\omega}{3l} x_3$, $K_{13} = -\frac{\omega}{3l} x_1$, $K_{33} = \omega$ et $K_{ij} = 0$ sinon. On en déduit $\Omega_{13} = -\Omega_{31} = -\frac{\omega}{6l} x_1$ et $\Omega_{ij} = 0$ sinon et donc $\underline{\omega} = -\frac{\omega}{6l} x_1 \underline{e}^{(2)}$. **24)** Pour $t = 0$, on $D_{13} = D_{31} = -\frac{\omega}{6l} x_1$ et $D_{ij} = K_{ij}$ sinon. **25)** La vitesse $\underline{U}(x, 0)$ est nulle dans le plan $x_3 = 0$. Les lignes de champs sont des courbes paramétrées $\underline{y}(s)$ telles que $\frac{d}{ds} \underline{y}(s) = \phi(s) \underline{U}[\underline{y}(s), 0]$, ce qui s'écrit $\frac{d}{ds} y_1 = -\frac{\omega}{3l} y_1 y_3$, $\frac{d}{ds} y_2 = 0$ et $\frac{d}{ds} y_3 = \omega y_3$. Dans le plan $x_1 = 0$, les trajectoires $y_1(s) = 0$, $y_2(s) = y_2(0)$ et $y_3(s) = y_3(0) \exp(\omega s)$ sont des droites. En dehors de ce plan et du plan $x_1 = 0$, l'équation $dy_1/U_1 = dy_3/U_3$ s'intègre en $y_3(y_1) = -3l \text{Ln} |y_1/b_1|$ où $(b_1, b_2, 0)$ sont les coordonnées de l'intersection de la ligne de courant $[y_1, b_2, y_3(y_1)]$ avec le plan $x_3 = 0$ (voir figure 1a). **26)** L'image du losange est presque un losange. Celles des deux cercles sont des ellipses dont les tracés, représentés sur la figure 1b, peuvent se déduire du tracé des lignes de champs ou d'un calcul plus précis consistant à calculer les vecteurs propres de $\underline{C}(a_I, t_m)$ et leurs images par $\underline{F}(a_I, t_m)$. **27)** Pour $x = x_I = -2l \underline{e}^{(1)}$ et $t = 0$, on a $D_{13} = D_{31} = -\frac{\omega}{3}$, $D_{33} = \omega$ et $D_{ij} = 0$ sinon. Les valeurs propres de $\underline{D}(x_I, 0)$ sont $s^{(1)} = \frac{3 - \sqrt{13}}{6} \omega \sim -0.10 \omega$, $s^{(2)} = 0$, et $s^{(3)} = \frac{3 + \sqrt{13}}{6} \omega \sim 1.10 \omega l$. Les vecteurs propres associés sont, respectivement, $\underline{\psi}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \underline{e}^{(3)} \sim \underline{e}^{(1)} - 0.30 \underline{e}^{(3)}$, $\underline{\psi}^{(2)} = \underline{e}^{(2)}$ et $\underline{\psi}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \underline{e}^{(3)} \sim \underline{e}^{(1)} + 3.30 \underline{e}^{(3)}$.