

OBJECTIFS DU COURS DE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. Place du cours dans la formation
2. Plan du cours
3. Organisation pratique
4. Des expériences à la modélisation

1 Mécanique des milieux continus déformables, Chapitre 1

Chapitre 1 : INTRODUCTION

Equations d'évolutions des milieux continus

Expériences sur les fluides

- Pression hydrostatique et force d'Archimède
- Vélocimètre de Venturi dans une conduite
- Écoulement de Couette et viscosité

Expériences sur les solides déformables

- Expérience de traction d'un barreau
- Immersion d'un barreau élastique dans un fluide
- Expérience de cisaillement d'un barreau

Expérience sur la chaleur

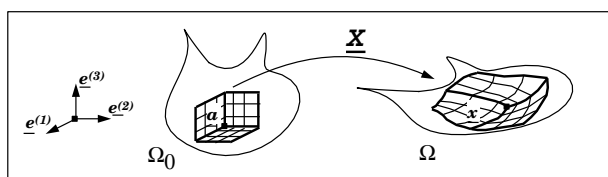
- Diffusion de la chaleur à travers un milieu

Loi de comportement

- Loi de Fourier
- Loi de Hooke
- Loi de comportement des fluides newtoniens

2 Mécanique des milieux continus déformables, Chapitre 1

Chapitre 2 : GRANDES DÉFORMATIONS



$$\begin{aligned} \underline{X} : \quad \Omega_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{a} &\longmapsto \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}) \\ \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2.1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= ka_1 \\ x_2 &= a_2 \\ x_3 &= a_3 + \beta a_1^2 \end{aligned}$$

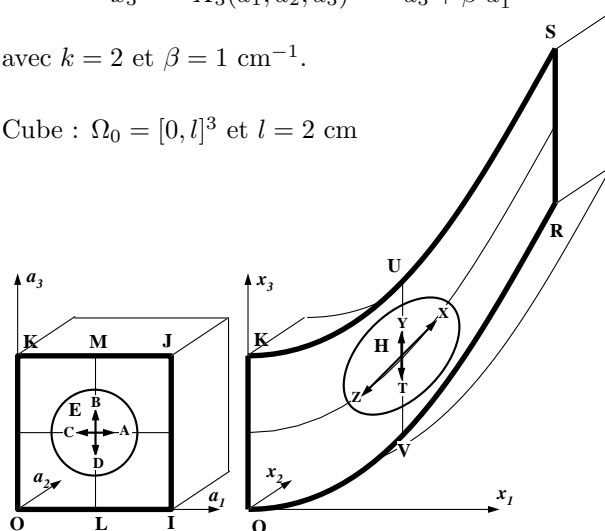
3 Mécanique des milieux continus déformables, Chapitre 2

Ex 2.1 : Déformation de ma gomme

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(a_1, a_2, a_3) = ka_1 \\ x_2 &= X_2(a_1, a_2, a_3) = a_2 \\ x_3 &= X_3(a_1, a_2, a_3) = a_3 + \beta a_1^2 \end{aligned}$$

avec $k = 2$ et $\beta = 1 \text{ cm}^{-1}$.

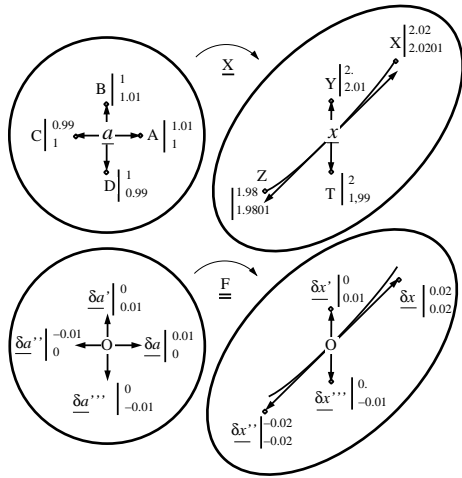
Cube : $\Omega_0 = [0, l]^3$ et $l = 2 \text{ cm}$



4 Mécanique des milieux continus déformables, Chapitre 2

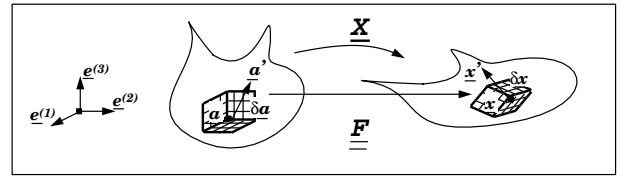
Matrice Jacobienne $\underline{\underline{F}}(\underline{a})$ autour de \underline{a}

$$\underline{\underline{F}}(\underline{a}) : \quad \underline{\delta a} \rightarrow \underline{\delta x} = \underline{\underline{F}} \underline{\delta a}$$



$$\underline{\underline{X}}(\underline{a} + \underline{\delta a}) = \underline{\underline{X}}(\underline{a}) + \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \underline{\delta a} + \underline{O}[(\delta a)^2]$$

Matrice gradient de la déformation : $\underline{\underline{F}}(\underline{a})$



$$\underline{x}' = \underline{\underline{X}}(\underline{a}') = \underline{\underline{X}}(\underline{a} + \underline{\delta a}) = \underline{\underline{X}}(\underline{a}) + \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \underline{\delta a} + \underline{O}[(\delta a)^2]$$

$$F_{ij}(\underline{a}) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a})$$

$$\underline{\delta x} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \underline{\delta a} + \underline{O}[(\delta a)^2]$$

$$\delta x_i = F_{ij}(\underline{a}) \delta a_j + \underline{O}[(\delta a)^2] = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}) \delta a_j + \underline{O}[(\delta a)^2]$$

Calcul de $\underline{\underline{F}}(E)$ pour ma gomme :

$$x_1 = X_1(a_1, a_2, a_3) = k a_1$$

$$x_2 = X_2(a_1, a_2, a_3) = a_2$$

$$x_3 = X_3(a_1, a_2, a_3) = a_3 + \beta a_1^2$$

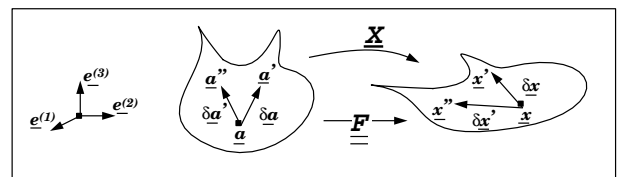
$$\underline{\underline{F}}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\beta a_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k = 2$ et $\beta = 1 \text{ cm}^{-1}$ et dans le plan $(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(3)})$:

$$\underline{\underline{F}}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\delta x} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \underline{\delta a}$$

Tenseur des dilatations



$$\underline{\underline{C}}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') = \underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}' = {}^t \underline{\delta x} \underline{\delta x}' = \delta x_i \delta x'_i$$

$$= (\underline{\underline{F}} \underline{\delta a}) \cdot (\underline{\underline{F}} \underline{\delta a}') = {}^t (\underline{\underline{F}} \underline{\delta a}) (\underline{\underline{F}} \underline{\delta a}')$$

$$= {}^t \underline{\delta a} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} \underline{\delta a}' = \delta a_i F_{ni} F_{nj} \delta a'_j$$

$$\underline{\underline{C}}(\underline{a}) = {}^t \underline{\underline{F}}(\underline{a}) \underline{\underline{F}}(\underline{a})$$

$$C_{ij}(\underline{a}) = C_{ji}(\underline{a}) = F_{ni}(\underline{a}) F_{nj}(\underline{a})$$

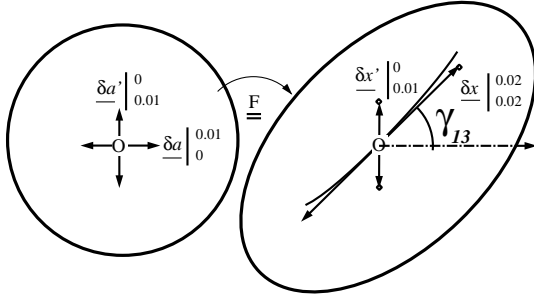
En conclusion :

$$\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}' = \underline{\underline{C}}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') = {}^t \underline{\delta a} \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \underline{\delta a}' = \delta a_i C_{ij} \delta a'_j$$

Tenseur des dilatations pour ma gomme

$${}^t \underline{\underline{F}}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{F}}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



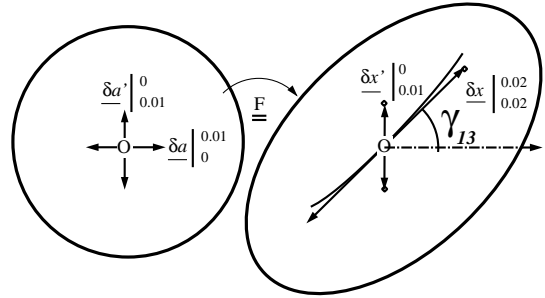
$$\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}' = (0.02, 0.02) \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} = 0.0002$$

$${}^t \underline{\delta a} \underline{\underline{C}} \underline{\delta a}' = (0.01, 0) \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} = 0.0002$$

Dilatation relative des longueurs : $\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a})$

$$\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \frac{\|\underline{\delta x}\|}{\|\underline{\delta a}\|} = \frac{\sqrt{\underline{\underline{C}}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a})}}{\|\underline{\delta a}\|}$$

$$\Lambda(\underline{a}; \underline{\delta a}) = \sqrt{\frac{{}^t \underline{\delta a} \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \underline{\delta a}}{\|\underline{\delta a}\|^2}} = \sqrt{\frac{\delta a_i C_{ij} \delta a_j}{\delta a_n \delta a_n}}$$

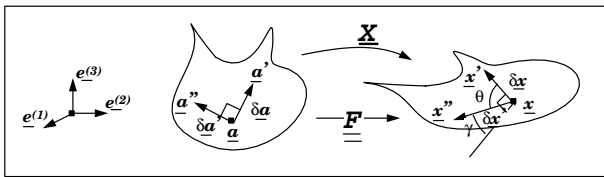


$$\|\underline{\delta x}\| = .02\sqrt{2} \quad \|\underline{\delta a}\| = .01 \quad \Lambda = \frac{\|\underline{\delta x}\|}{\|\underline{\delta a}\|} = 2\sqrt{2}$$

$$\Lambda^2 = (1, 0) \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

Glissement des vecteurs orthogonaux

$$\gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') \quad \text{avec} \quad \underline{\delta a} \cdot \underline{\delta a}' = 0$$



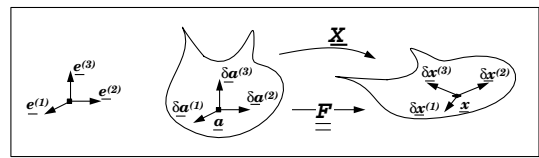
$$\underline{\delta x} \cdot \underline{\delta x}' = \|\underline{\delta x}\| \|\underline{\delta x}'\| \sin \gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}')$$

$$\sin \gamma(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}') = \frac{\underline{\underline{C}}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a}')}{\sqrt{\underline{\underline{C}}(\underline{a}; \underline{\delta a}, \underline{\delta a})} \sqrt{\underline{\underline{C}}(\underline{a}; \underline{\delta a}', \underline{\delta a}')}}}$$

$$= \frac{{}^t \underline{\delta a} \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \underline{\delta a}'}{\sqrt{{}^t \underline{\delta a} \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \underline{\delta a}} \sqrt{{}^t \underline{\delta a}' \underline{\underline{C}}(\underline{a}) \underline{\delta a}'}}$$

$$= \frac{\delta a_i C_{ij} \delta a'_j}{\sqrt{\delta a_m C_{mn} \delta a_n} \sqrt{\delta a'_p C_{pq} \delta a'_q}}$$

Transport de la base canonique



Dilatations relatives des vecteurs de base :

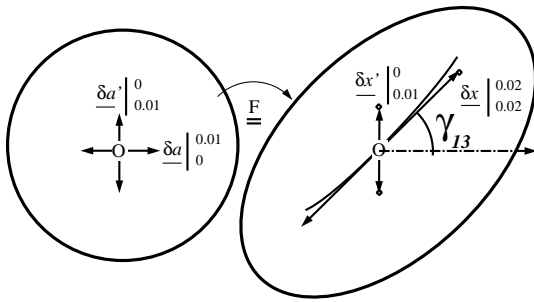
$$\begin{aligned} \Lambda^2 [\underline{a}; \delta a \underline{e}^{(1)}] &= \frac{\|\underline{\delta x}^{(1)}\|^2}{\|\underline{\delta a}^{(1)}\|^2} \\ &= \frac{{}^t (\delta a \underline{e}^{(1)}) \underline{\underline{C}} (\delta a \underline{e}^{(1)})}{(\delta a)^2} = C_{11} \end{aligned}$$

Glissement des vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \underline{\delta x}^{(1)} \cdot \underline{\delta x}^{(2)} &= \|\underline{\delta x}^{(1)}\| \|\underline{\delta x}^{(2)}\| \sin \gamma_{12} \\ &= {}^t (\delta a \underline{e}^{(1)}) \underline{\underline{C}} (\delta a \underline{e}^{(2)}) = (\delta a)^2 C_{12} \end{aligned}$$

$$\sin \gamma_{12} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} = \frac{C_{21}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}}$$

Exemple de ma gomme



$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \Lambda^2 [\underline{a}; \delta a \underline{e}^{(1)}] = 8$$

d'où $\sqrt{C_{11}} = 2\sqrt{2}$.

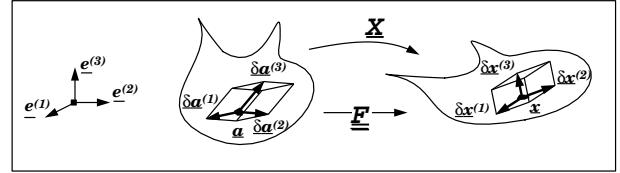
$$\sin \gamma_{13} = \frac{C_{13}}{\sqrt{C_{11} C_{33}}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où $\gamma_{13} = \pi/4$.

Transport des volumes

$$\delta \mathcal{V}_0 = |(\delta \underline{a}, \delta \underline{a}', \delta \underline{a}'')|$$

$$(\delta \underline{a}, \delta \underline{a}', \delta \underline{a}'') = \delta \underline{a} \cdot (\delta \underline{a}' \wedge \delta \underline{a}'') = \varepsilon_{ijk} \delta a_i \delta a'_j \delta a''_k$$



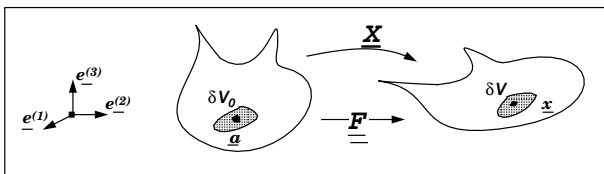
$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V} &= |(\delta \underline{x}, \delta \underline{x}', \delta \underline{x}'')| = |(\underline{F} \delta \underline{a}, \underline{F} \delta \underline{a}', \underline{F} \delta \underline{a}'')| \\ &= |\det \underline{F}| |(\delta \underline{a}, \delta \underline{a}', \delta \underline{a}'')| = |\det \underline{F}| \delta \mathcal{V}_0 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \mathcal{V}_0} = J(\underline{a}) = |\det \underline{F}(\underline{a})|$$

Intégrale volumique

$$\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}), \quad \underline{F}(\underline{a}) = \underline{\text{grad}} \underline{X}(\underline{a})$$

$$\delta \mathcal{V} = J(\underline{a}) \delta \mathcal{V}_0, \quad J(\underline{a}) = |\det \underline{F}(\underline{a})|$$

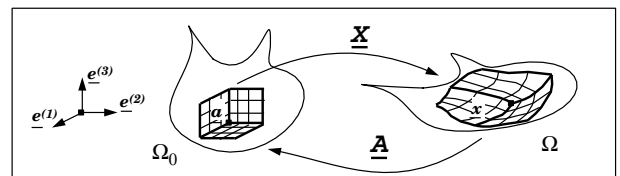


$$\iiint_{\mathcal{D}} f(\underline{x}) d^3 x = \iiint_{\mathcal{D}_0} f[\underline{X}(\underline{a})] J(\underline{a}) d^3 a$$

Déformation inverse : \underline{A}

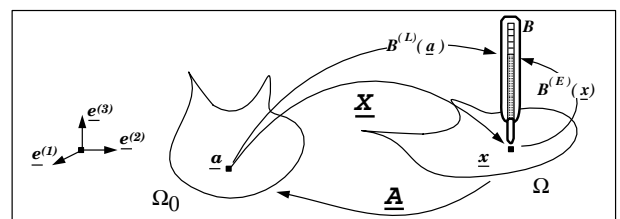
$$\underline{A} : \Omega \rightarrow \Omega_0$$

$$\underline{x} \mapsto \underline{a} = \underline{A}(\underline{x})$$



Représentations eulérienne et lagrangienne

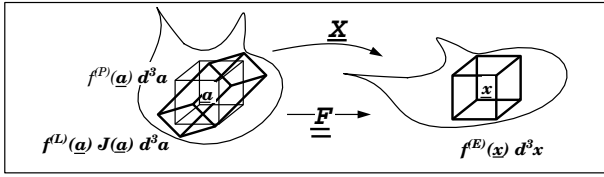
$$B^{(L)}(\underline{a}) = B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a})] \iff B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x})] = B^{(E)}(\underline{x})$$



$$B^{(L)}(\underline{a}) = B^{(E)}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$$

Représentation particulière

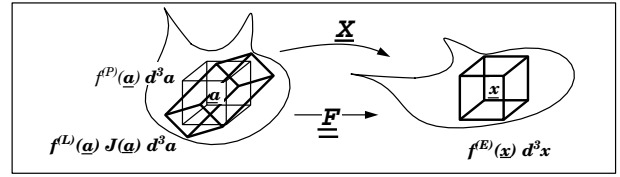
$$f^{(L)}(\underline{a}) = f^{(E)}(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$$



$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} f^{(E)}(\underline{x}) d^3 x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} f^{(E)}[\underline{X}(\underline{a})] J(\underline{a}) d^3 a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} f^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) d^3 a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} f^{(P)}(\underline{a}) d^3 a \end{aligned}$$

$$f^{(P)}(\underline{a}) = f^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) .$$

Conservation de la masse



$$\begin{aligned} m(\mathcal{D}) &= \iiint_{\mathcal{D}} \rho^{(E)}(\underline{x}) d^3 x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) d^3 a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(P)}(\underline{a}) d^3 a . \end{aligned}$$

Loi de conservation de la masse

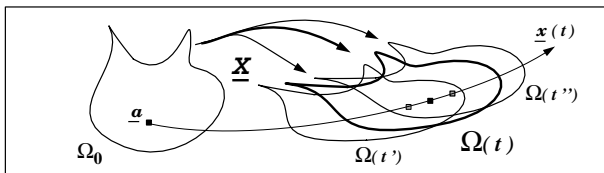
Il existe un champ $\rho^{(P)}$ tel que pour toute déformation \underline{X} le champ ρ est déterminé par :

$$\rho^{(E)}[\underline{X}(\underline{a})] J(\underline{a}) = \rho^{(L)}(\underline{a}) J(\underline{a}) = \rho^{(P)}(\underline{a}) .$$

Cas homogène dans Ω_0 : $\rho^{(P)}(\underline{a}) = \rho_0$

Chapitre 3 : CINÉMATIQUE

Description lagrangienne du mouvement



$$\begin{aligned} \underline{X} : \Omega_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\underline{a}, t) &\longmapsto \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t) \end{aligned}$$

$$\underline{F}(\underline{a}, t) = \text{grad} \underline{X}(\underline{a}, t), \quad J(\underline{a}, t) = |\det [\underline{F}(\underline{a}, t)]|$$

$$\underline{C}(\underline{a}, t) = {}^t \underline{F}(\underline{a}, t) \underline{F}(\underline{a}, t), \quad \text{etc.}$$

Ex 3.1 : Mouvement de ma gomme

$$\begin{aligned} x_1 &= k(t) a_1 \\ x_2 &= a_2 \\ x_3 &= a_3 + \beta(t) a_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } k(t) &= k_0 - c_0 \cos 2\omega t = 3 - 2 \cos 2\omega t \\ \beta(t) &= \beta_0 \sin \omega t = 1 \text{cm}^{-1} \sin \omega t \end{aligned}$$

$${}^t \underline{F} = \begin{pmatrix} k(t) & 0 & 2\beta(t)a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} k(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\beta(t)a_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} = {}^t \underline{F}(\underline{a}, t) \underline{F}(\underline{a}, t) = \begin{pmatrix} k^2 + 4\beta^2 a_1^2 & 0 & 2\beta a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\beta a_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déformations inverses

$$\begin{aligned} \underline{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Omega_0 \\ (\underline{x}, t) &\mapsto \underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

$$\underline{A}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = \underline{a} \iff \underline{X}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] = \underline{x}$$

Exo 3.1 : Mouvement de ma gomme

$$\begin{aligned} x_1 &= k(t)a_1 \\ x_2 &= a_2 \\ x_3 &= a_3 + \beta(t)a_1^2, \end{aligned}$$

Déformations inverses :

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1/k(t) \\ a_2 &= x_2 \\ a_3 &= x_3 - \beta(t)x_1^2/k^2(t) \end{aligned}$$

Représentations des champs

$$\begin{aligned} B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] &= B^{(L)}(\underline{a}, t) \\ B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] &= B^{(E)}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

Exemple :

$$\text{soit } B^{(E)}(\underline{x}, t) = \gamma x_1^2 t^3 \quad \text{un champ}$$

Mouvement de ma gomme :

$$\underline{X}(\underline{a}, t) \begin{cases} x_1 = k(t)a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_3 + \beta(t)a_1^2 \end{cases}$$

Déformation inverse :

$$\underline{A}(\underline{x}, t) \begin{cases} a_1 = x_1/k(t) \\ a_2 = x_2 \\ a_3 = x_3 - \beta(t)x_1^2/k^2(t) \end{cases}$$

Représentation lagrangienne :

$$B^{(L)}(\underline{a}, t) = \gamma k^2(t) a_1^2 t^3$$

Loi de conservation de la masse

$$\begin{aligned} m[\mathcal{D}(t)] &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho^{(E)}(\underline{x}, t) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a \end{aligned}$$

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0$$

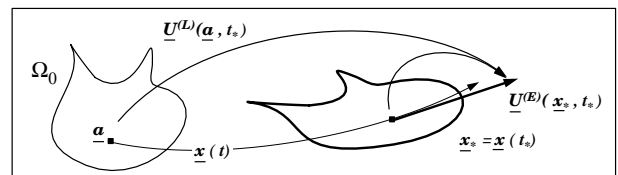
Exemple du mouvement de ma gomme :

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} k(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\beta(t)a_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies J(\underline{a}, t) = k(t)$$

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) = \rho_0/k(t) = \rho^{(E)}(\underline{x}, t)$$

Car ρ est homogène en espace

Champs de vitesse



$$\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial \underline{X}}{\partial t}(\underline{a}, t)$$

$$\begin{aligned} \underline{U}^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] &= \underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) \\ \underline{U}^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] &= \underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

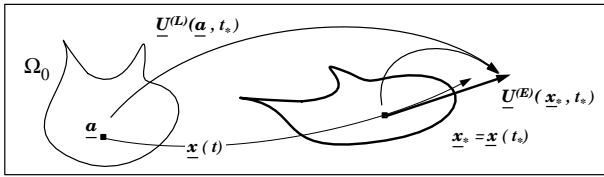
Exemple : mouvement de ma gomme

$$\underline{X}(\underline{a}, t) = \begin{pmatrix} k(t)a_1 \\ a_2 \\ a_3 + \beta(t)a_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t) = \begin{pmatrix} k'(t)a_1 \\ 0 \\ \beta'(t)a_1^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{k'(t)}{k(t)}x_1 \\ 0 \\ \frac{\beta'(t)}{k^2(t)}x_1^2 \end{pmatrix}$$

Trajectoires

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$$



$$\frac{d}{dt} [\underline{x}(t)] = \underline{U}^{(E)} [\underline{x}(t), t] .$$

Exemple : mouvement de ma gomme

$$\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t) = \begin{pmatrix} k(t) a_1 \\ a_2 \\ a_3 + \beta(t) a_2^2 \end{pmatrix}$$

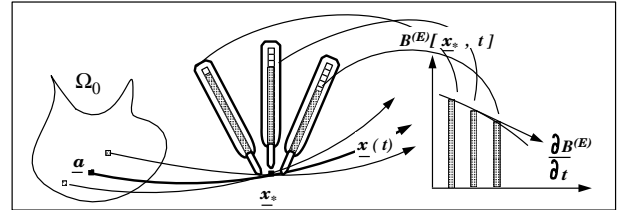
Condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{a}$ si $k(0) = 1$ et $\beta(0) = 0$

$$\frac{d}{dt} [\underline{x}(t)] = \begin{pmatrix} \frac{k'(t)}{k(t)} x_1 \\ 0 \\ \beta'(t) x_1^2 \end{pmatrix}$$

Dérivée partielle eulérienne d'un champ

Soit $B^{(E)}(\underline{x}, t)$

la représentation eulérienne d'un champ B .



Interprétation de $\frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}(\underline{x}, t)$:

Pour \underline{x}_* figé,

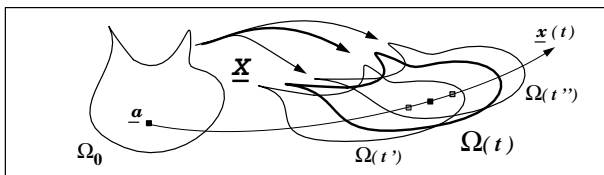
on mesure le signal $B^{(E)}(\underline{x}_*, t)$.

Sa dérivée est $\frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}(\underline{x}_*, t)$.

Dérivée particulière d'un champ

Soit $B^{(L)}(\underline{a}, t)$

la représentation lagrangienne d'un champ B .



La dérivée particulière $\frac{dB}{dt}$ est définie par sa représentation lagrangienne

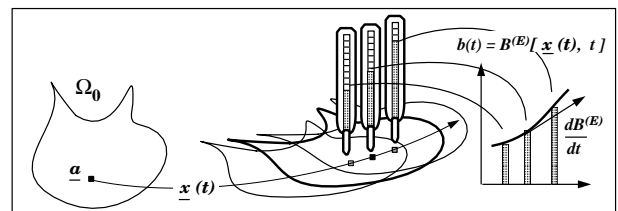
$$\left(\frac{dB}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) .$$

Théorème de la dérivée particulière

Soit $\underline{X}(\underline{a}, t)$ un mouvement défini par la vitesse \underline{U} : $\underline{U}^{(L)}(\underline{a}, t)$ (lagrangienne) et $\underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t)$ (eulérienne)

Soit B un champ défini par ses représentations

$B^{(L)}(\underline{a}, t)$ (lagrangienne) ou $B^{(E)}(\underline{x}, t)$ (eulérienne)



La dérivée particulière de B définie par

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$$

admet la représentation eulérienne

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)^{(E)}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}(\underline{x}, t) + U_i^{(E)}(\underline{x}, t) \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}(\underline{x}, t)$$

Démonstration :

$$B^{(L)}(\underline{a}, t) = B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) &= \frac{d}{dt} \left\{ B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \right\} \\ &= \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] + \frac{\partial X_i}{\partial t}(\underline{a}, t) \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \\ &= \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] + U_i^{(L)}(\underline{a}, t) \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \\ &= \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] + U_i^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \end{aligned}$$

$$\text{Car } \frac{\partial X_i}{\partial t}(\underline{a}, t) = U_i^{(L)}(\underline{a}, t)$$

$$\text{et } U_i^{(L)}(\underline{a}, t) = U_i^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$$

Démonstration (suite) :

$$\text{On a vu } \frac{dB^{(L)}}{dt}(\underline{a}, t) =$$

$$\frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] + U_i^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$$

$$\text{Par définition } \frac{dB^{(L)}}{dt}(\underline{a}, t) = \frac{dB^{(E)}}{dt}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$$

$$\text{On a donc } \frac{dB^{(E)}}{dt}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] =$$

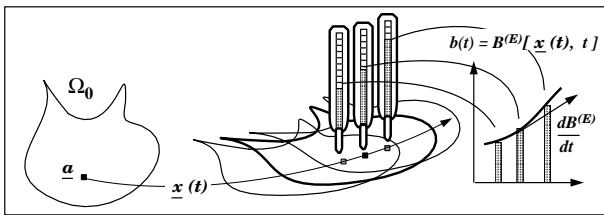
$$\frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] + U_i^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$$

D'où l'on tire

$$\frac{dB^{(E)}}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}(\underline{x}, t) + U_i^{(E)}(\underline{x}, t) \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}(\underline{x}, t)$$

Interprétation géométrique

Soit $b(t) = B^{(E)}[\underline{x}(t), t]$ où $\underline{x}(t)$ est une trajectoire.



$$b(t) = B^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t)$$

$$\frac{d}{dt}[b(t)] = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \frac{dB^{(E)}}{dt}[\underline{x}(t), t]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[b(t)] &= \frac{d}{dt} \left\{ B^{(E)}[\underline{x}(t), t] \right\} \\ &= \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{x}(t), t] + \frac{d}{dt}[x_i(t)] \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{x}(t), t] \\ &= \frac{\partial B^{(E)}}{\partial t}[\underline{x}(t), t] + U_i^{(E)}[\underline{x}(t), t] \frac{\partial B^{(E)}}{\partial x_i}[\underline{x}(t), t] \end{aligned}$$

Description eulérienne du mouvement

$\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}^{(E)}(\underline{x}, t)$ champ de vitesse

Notations : $\underline{\text{grad}}$, div , Δ ou $\underline{\text{grad}}$

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + U_j(\underline{x}, t) \frac{\partial B}{\partial x_j}(\underline{x}, t)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} B$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + {}^t \underline{U} \underline{\text{grad}} B$$

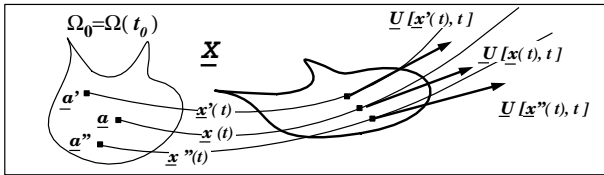
$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}) \underline{V} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + [\underline{\text{grad}} \underline{V}] \underline{U}$$

Détermination des trajectoires

$$\frac{d}{dt} [\underline{x}(t)] = \underline{U} [\underline{x}(t), t]$$

avec la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{a}$



L'ensemble de toutes les trajectoires détermine

$$\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{x}(t) \text{ où } \underline{x}(0) = \underline{a}$$

Exemple : $k(0) = 1$ et $\beta(0) = 0$

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U} [\underline{x}(t), t] = \begin{pmatrix} \frac{k'(t)}{k(t)} x_1 \\ 0 \\ \frac{\beta'(t)}{k^2(t)} x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} k(t) a_1 \\ a_2 \\ a_3 + \beta(t) a_1^2 \end{pmatrix}$$

Lignes de champ du champ de vitesse

Définition :

À l'instant t fixé les lignes de champ de $\underline{U}(\underline{x}, t)$ sont

$$\frac{d}{ds} [\underline{y}(s)] = \phi(s) \underline{U} [\underline{y}(s), t]$$

avec $\phi(s)$ fonction strictement positive

Exemple 1 : $\phi(s) = 1$

Exemple 2 : $\phi(s) = \|\underline{U} [\underline{y}(s), t]\|^{-1}$

Définitions équivalentes :

$$\frac{d}{ds} [\underline{y}(s)] \wedge \underline{U} [\underline{y}(s), t] = 0$$

$$\frac{dy_1}{U_1} = \frac{dy_2}{U_2} = \frac{dy_3}{U_3}$$

Gradient du champ de vitesse

Soit \underline{x} et \underline{x}' deux points très proches

On note $\underline{\delta x} = \underline{x}' - \underline{x}$

A l'instant t ,

on compare leur vitesse eulérienne :

$$\underline{U}(\underline{x}', t) - \underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{K}(\underline{x}, t) \underline{\delta x} + \underline{O} [(\underline{\delta x})^2]$$

La matrice \underline{K}

est le gradient du champ de vitesse en \underline{x} et t :

$$\underline{K}(\underline{x}, t) = \underline{\text{grad}} \underline{U}(\underline{x}, t)$$

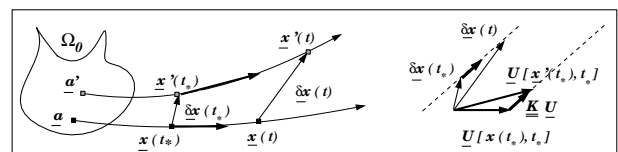
ou encore

$$K_{ij}(\underline{x}, t) = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t)$$

Vecteurs transportés par le mouvement

Soit $\underline{x}(t)$ et $\underline{x}'(t)$ deux trajectoires très proches

On note $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] &= \frac{d}{dt} [\underline{x}'(t)] - \frac{d}{dt} [\underline{x}(t)] \\ &= \underline{U} [\underline{x}'(t), t] - \underline{U} [\underline{x}(t), t] \\ &= \underline{K} [\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}(t) + \underline{O} [(\underline{\delta x})^2] \end{aligned}$$

Un vecteur $\underline{\delta x}(t)$ transporté par le mouvement vérifie donc

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] = \underline{K} [\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}(t)$$

Vecteur rotation

$$\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{D}}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$$

avec

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{K}} + {}^t \underline{\underline{K}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{K}} - {}^t \underline{\underline{K}}) .$$

Tenseur des taux de rotation :

$$\Omega_{ij}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t) - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(\underline{x}, t) \right] .$$

Vecteur rotation : $\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \text{rot} [\underline{U}(\underline{x}, t)]$

$$\omega_i(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}(\underline{x}, t)$$

On montre que

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \underline{\delta x} = \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge \underline{\delta x}$$

Formules pratiques à retenir :

$$\omega_1 + \Omega_{23} = 0, \quad \omega_2 - \Omega_{13} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_3 + \Omega_{12} = 0$$

Cas particulier $\underline{\underline{K}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t)$

Supposons que $\underline{\underline{D}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}}$ pour un \underline{x} et un t

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] = \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) \underline{\delta x}(t) = \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge \underline{\delta x}(t)$$

Dans le voisinage de \underline{x} on a

$$\underline{U}(\underline{x}', t) \sim \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge [\underline{x}' - \underline{x}] + O[(\delta x)^2]$$

Interprétation :

Mouvement solide autour de \underline{x} et au temps t

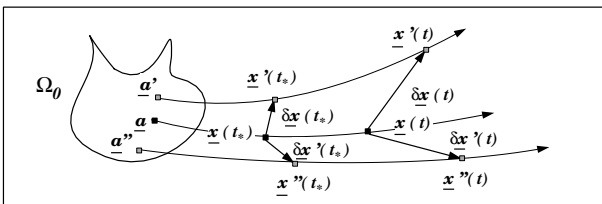
(voir complément sur les distributeurs)

Cas général : $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{D}}$

Mouvement solide local plus déformation locale !

Transport du produit scalaire

Soit $\underline{x}(t)$, $\underline{x}'(t)$ et $\underline{x}''(t)$ trois trajectoires très proches
 $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$



$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}] = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} [\underline{\delta x}'] = \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}'$$

On a $\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] =$

$$\begin{aligned} &= \underline{\delta x}(t) \cdot \frac{d}{dt} [\underline{\delta x}'(t)] + \frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] \cdot \underline{\delta x}'(t) \\ &= {}^t \underline{\delta x}(t) \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}'(t) + {}^t \underline{\delta x}(t) \underline{\underline{K}}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}'(t) \\ &= 2 {}^t \underline{\delta x}(t) \underline{\underline{D}}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}'(t) \end{aligned}$$

avec $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{K}} + {}^t \underline{\underline{K}})$

Tenseur des taux de déformations

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{K}} + {}^t \underline{\underline{K}})$$

$$D_{ij}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(\underline{x}, t) + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}(\underline{x}, t) \right] .$$

Pour $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ transportés par le mouvement

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] = 2 {}^t \underline{\delta x}(t) \underline{\underline{D}}(\underline{x}, t) \underline{\delta x}'(t)$$

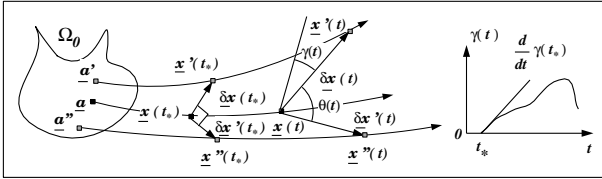
Taux d'allongement relatif :

En appliquant $\underline{\delta x}(t) = \underline{\delta x}'(t)$ on obtient

$$\begin{aligned} 2 \|\underline{\delta x}(t)\| \frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}(t)\| &= 2 {}^t \underline{\delta x}(t) \underline{\underline{D}}(\underline{x}, t) \underline{\delta x}(t) \\ \frac{1}{\|\underline{\delta x}(t)\|} \frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}(t)\| &= \frac{{}^t \underline{\delta x}(t) \underline{\underline{D}}(\underline{x}, t) \underline{\delta x}(t)}{\|\underline{\delta x}(t)\|^2} \end{aligned}$$

Taux de glissement

Soit $\underline{\delta x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t)$ du voisinage de $\underline{x}(t)$ tels que $\underline{\delta x}(t_*) \cdot \underline{\delta x}'(t_*) = 0$ au temps t_* .



Si $\theta(t)$ est leur angle

l'angle de glissement est $\gamma(t) = \pi/2 - \theta(t)$

Il vérifie $\gamma(t_*) = 0$

En dérivant par rapport au temps

$$\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t) = \|\underline{\delta x}(t)\| \|\underline{\delta x}'(t)\| \sin \gamma(t),$$

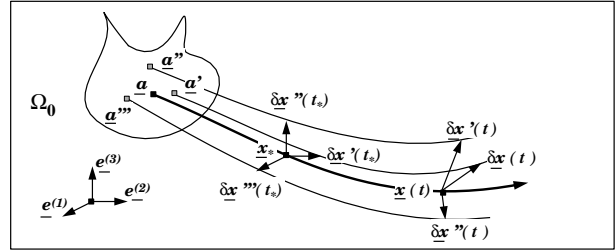
On obtient au temps t_*

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_*) = 2 \frac{t \underline{\delta x}(t_*) \underline{D}(\underline{x}_*, t_*) \underline{\delta x}'(t_*)}{\|\underline{\delta x}(t_*)\| \|\underline{\delta x}'(t_*)\|}$$

Composantes de \underline{D}

Soit $[\underline{\delta x}^{(1)}(t), \underline{\delta x}^{(2)}(t), \underline{\delta x}^{(3)}(t)]$ tels que

$$[\underline{\delta x}^{(1)}(t_*), \underline{\delta x}^{(2)}(t_*), \underline{\delta x}^{(3)}(t_*)] = \delta x [\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}]$$



Les angles de glissement $\gamma_{ij}(t)$ sont définis par

$$\underline{\delta x}^{(1)}(t) \cdot \underline{\delta x}^{(2)}(t) = \|\underline{\delta x}^{(1)}(t)\| \|\underline{\delta x}^{(2)}(t)\| \sin \gamma_{12}(t)$$

Théorème :

$$D_{11}(\underline{x}_*, t_*) = \frac{1}{\|\underline{\delta x}^{(1)}(t_*)\|} \frac{d}{dt} \|\underline{\delta x}^{(1)}(t_*)\|$$

$$D_{12}(\underline{x}_*, t_*) = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{12}}{dt}(t_*)$$

Taux de dilatation des volumes

Théorème :

si $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d}{dt} [\delta\mathcal{V}(t)] = \text{tr} [\underline{D}(\underline{x}, t)] = \text{div} \underline{U}(\underline{x}, t)$$

Démonstration :

Soit $[\underline{\delta x}^{(1)}(t), \underline{\delta x}^{(2)}(t), \underline{\delta x}^{(3)}(t)]$ tels que

$$[\underline{\delta x}^{(1)}(t_*), \underline{\delta x}^{(2)}(t_*), \underline{\delta x}^{(3)}(t_*)] = \delta x [\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}]$$

Comme $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}^{(i)}(t) = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}^{(i)}(t)$ le volume

$$\delta\mathcal{W}(t) = \left(\underline{\delta x}^{(1)}(t), \underline{\delta x}^{(2)}(t), \underline{\delta x}^{(3)}(t) \right)$$

se dérive de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\mathcal{W})}{dt}(t) &= \left(\underline{K}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}^{(1)}(t), \underline{\delta x}^{(2)}(t), \underline{\delta x}^{(3)}(t) \right) \\ &+ \left(\underline{\delta x}^{(1)}(t), \underline{K}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}^{(2)}(t), \underline{\delta x}^{(3)}(t) \right) \\ &+ \left(\underline{\delta x}^{(1)}(t), \underline{\delta x}^{(2)}(t), \underline{K}[\underline{x}(t), t] \underline{\delta x}^{(3)}(t) \right) \end{aligned}$$

Taux de dilatation des volumes (suite)

À l'instant $t = t_*$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\mathcal{W})}{dt}(t_*) &= (\delta x)^3 \left(\underline{K}(\underline{x}_*, t_*) \underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)} \right) \\ &+ (\delta x)^3 \left(\underline{e}^{(1)}, \underline{K}(\underline{x}_*, t_*) \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)} \right) \\ &+ (\delta x)^3 \left(\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{K}(\underline{x}_*, t_*) \underline{e}^{(3)} \right) \\ &= (\delta x)^3 [K_{11}(\underline{x}_*, t_*) + K_{22}(\underline{x}_*, t_*) + K_{33}(\underline{x}_*, t_*)] \end{aligned}$$

Comme $\delta\mathcal{W}(t_*) = (\delta x)^3$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta\mathcal{W}(t_*)} \frac{d(\delta\mathcal{W})}{dt}(t_*) &= \text{tr} [\underline{K}(\underline{x}_*, t_*)] \\ &= \text{tr} [\underline{D}(\underline{x}_*, t_*)] = \text{div} \underline{U}(\underline{x}_*, t_*) \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{\delta\mathcal{V}(t)} \frac{d(\delta\mathcal{V})}{dt}(t) = \text{div} \underline{U}(\underline{x}, t)$$

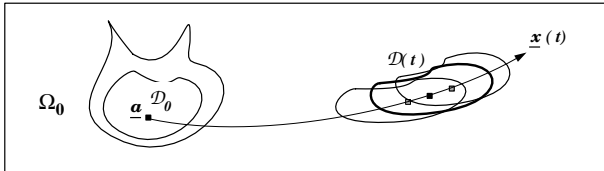
Théorèmes de transport

Domaine fixe :

$$\mathcal{C}[\mathcal{D}_{\text{fix}}] = \iiint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} c(\underline{x}, t) d^3x$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}_{\text{fix}}] = \iiint_{\mathcal{D}_{\text{fix}}} \frac{\partial c}{\partial t}(\underline{x}, t) d^3x$$

Domaine transporté par le mouvement :



$$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x$$

$$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a$$

où $J(\underline{a}, t) = |\det [\text{grad } \underline{X}(\underline{a}, t)]|$ est le Jacobien

Dérivée avec un domaine en mouvement

Cas 1D :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{\min}(t)}^{x_{\max}(t)} c(x, t) dx = \int_{x_{\min}(t)}^{x_{\max}(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) dx$$

$$+ \frac{dx_{\max}}{dt}(t) c[x_{\max}(t), t] - \frac{dx_{\min}}{dt}(t) c[x_{\min}(t), t]$$

Cas général :

Si $\mathcal{D}(t)$ est transporté par un mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} \right) d^3x$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

Démonstration : $\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] =$

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(E)}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t) d^3a$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a.$$

Comme $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t),$

on a $\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}_0} \frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a$

$$+ \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t) d^3a$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}_0} \frac{dc}{dt}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t) d^3a$$

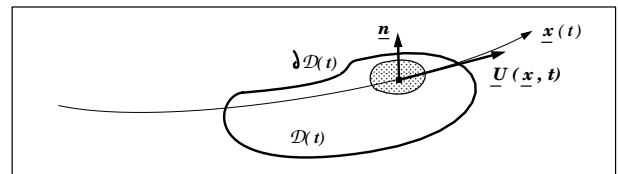
$$+ \iiint_{\mathcal{D}_0} c[\underline{X}(\underline{a}, t), t] \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t] J(\underline{a}, t) d^3a,$$

D'où $\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} \right) d^3x$

Flux d'advection $c \underline{U}$

$$\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } c + c \text{div } \underline{U}$$

$$= \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c \underline{U})$$



$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} \right) d^3x$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c \underline{U}) \right] d^3x$$

$$= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

Conservation de la masse

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x$$

Si $m[\mathcal{D}(t)]$ est invariant :

$$\frac{d}{dt} m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x = 0$$

Expressions locales de la conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{U}) = 0.$$

Écoulement isochores :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \implies \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Théorème de transport de Reynolds

On pose $c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t)$

Théorème : si la masse est conservée, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\phi}{dt} d^3x$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) d^3x \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) \phi^{(L)}(\underline{a}, t) d^3a \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{a}) \phi^{(L)}(\underline{a}, t) d^3a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{a}) \frac{\partial \phi^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) d^3a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) \frac{d\phi^{(L)}}{dt}(\underline{a}, t) d^3a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) \frac{d\phi}{dt}(\underline{x}, t) d^3x \end{aligned}$$

Cas des intégrales de champs de vecteurs

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}[\mathcal{D}(t)] &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{F} d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{d\underline{F}}{dt} + \underline{F} \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{F} + \underline{F} \operatorname{div} \underline{U} \right) d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \underline{F}}{\partial t} + \operatorname{div} (\underline{F} \otimes \underline{U}) \right] d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{F} (\underline{U} \cdot \underline{n}) dS \end{aligned}$$

$\underline{F}(\underline{x}, t) \otimes \underline{U}(\underline{x}, t)$ tenseur d'ordre 2

dont les composantes sont $F_i(\underline{x}, t) U_j(\underline{x}, t)$.

Compléments : champ d'accélération

$$\underline{\Gamma} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \underline{U}^2$$

Compléments : Torseurs

$$\underline{M}(\underline{x}) = \underline{M}(\underline{0}) + \underline{R} \wedge \underline{x}$$

$\underline{M}(\underline{0})$: moment en $\underline{0}$ | \underline{R} : résultante du torseur

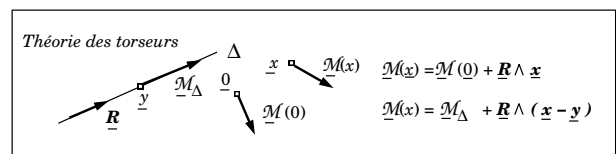
On montre que pour tout \underline{x} et tout \underline{y} on a

$$\underline{M}(\underline{x}) = \underline{M}(\underline{y}) + \underline{R} \wedge (\underline{x} - \underline{y})$$

Éléments de réduction : $(\Delta, \underline{M}_\Delta, \underline{R})$

Il existe une droite Δ parallèle à \underline{R} telle que

$\underline{M}(\underline{y}) = \underline{M}_\Delta$ parallèle à \underline{R} pour tout $\underline{y} \in \Delta$



On a donc pour \underline{x} et tout $\underline{y} \in \Delta$

$$\underline{M}(\underline{x}) = \underline{M}_\Delta + \underline{R} \wedge (\underline{x} - \underline{y})$$

Distributeurs et Torseurs

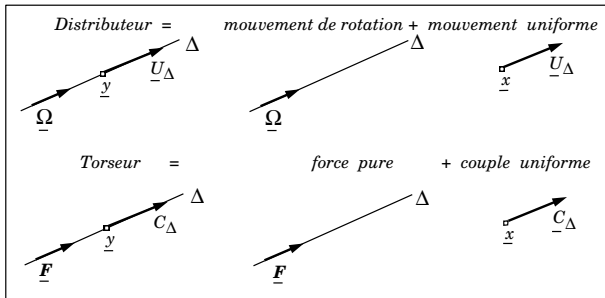
Distributeur : $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{0}) + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}$

$\underline{U}(\underline{0})$: vitesse en $\underline{0}$ | $\underline{\Omega}$: vecteur rotation

Torseur : $\underline{C}(\underline{x}) = \underline{C}(\underline{0}) + \underline{F} \wedge \underline{x}$

$\underline{C}(\underline{0})$: moment en $\underline{0}$ | \underline{F} : résultante du torseur

Décompositions des torseurs et distributeurs



(Distributeur) = (Mvt rotation) + (Mvt uniforme)

$$(\Delta, \underline{U}_\Delta, \underline{\Omega}) = (\Delta, \underline{0}, \underline{\Omega}) + (\emptyset, \underline{U}_\Delta, \underline{0})$$

(Torseur) = (Force pure) + (Couple uniforme)

$$(\Delta, \underline{C}_\Delta, \underline{F}) = (\Delta, \underline{0}, \underline{R}) + (\emptyset, \underline{C}_\Delta, \underline{0})$$

Dualité Torseurs / Distributeur

Notation pour un Torseur :

$$[C] = [\underline{0}, \underline{F}, \underline{C}(\underline{0})]$$

Notation pour un Distributeur :

$$\{U\} = \{\underline{0}, \underline{U}(\underline{0}), \underline{\Omega}\}$$

Puissance du couple Torseur / Distributeur

$$P = [C]\{U\} = \underline{F} \cdot \underline{U}(\underline{0}) + \underline{C}(\underline{0}) \cdot \underline{\Omega}$$

On montre que pour tout \underline{x} on a

$$P = [C]\{U\} = \underline{F} \cdot \underline{U}(\underline{x}) + \underline{C}(\underline{x}) \cdot \underline{\Omega}$$

Compléments : Systèmes dynamiques

Trajectoires du champs de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$:

$$\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$$

Système dynamique autonome :

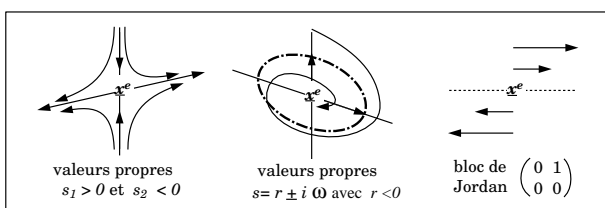
$$\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t)]$$

Si \underline{x}_e est un équilibre : $\underline{U}(\underline{x}_e) = \underline{0}$

On pose $\underline{x}(t) = \underline{x}_e + \underline{y}(t)$. Tant que \underline{y} est petit

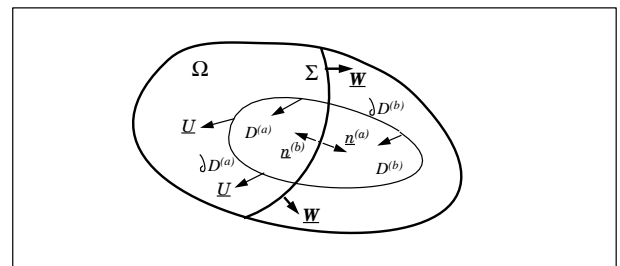
$$\frac{d\underline{y}}{dt}(t) = \underline{A} \underline{y}(t)$$

avec $\underline{A} = \underline{K}(\underline{x}_e) = \text{grad } \underline{U}(\underline{x}_e)$



Compléments : Surface de discontinuité

$$[[c]](\underline{x}, t) = c^{(b)}(\underline{x}, t) - c^{(a)}(\underline{x}, t),$$



$$\frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} c \, d^3x =$$

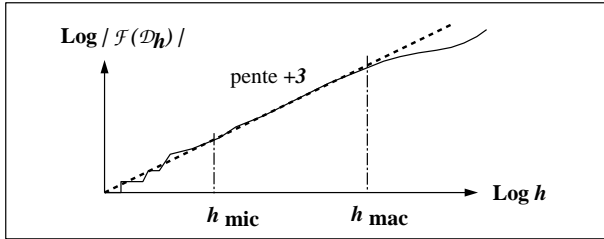
$$\iiint_{D(t)} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c \underline{U}) \right] d^3x$$

$$+ \iint_{\Sigma(t)} [[c(\underline{U} - \underline{W})]] \cdot \underline{n} \, dS$$

Chapitre 4 : HYPOTHÈSE DU CONTINU

Domaines \mathcal{D}_h emboîtés de volume $\mathcal{V}(\mathcal{D}_h) = h^3$
convergeant vers le point \underline{x} quand $h \rightarrow 0$

Grandeur physique extensive $\mathcal{F}(\mathcal{D})$
vérifie l'hypothèse du continu si



Nombre de Knüdsen $K_n = \frac{h_{\text{mic}}}{h_{\text{mac}}} \ll 1$

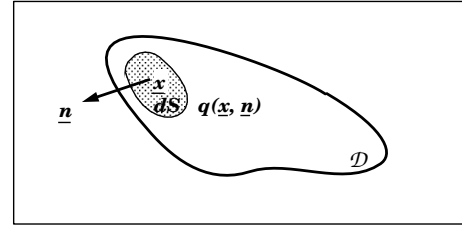
On définit alors la densité volumique $f(\underline{x})$ par
 $\mathcal{F}(\mathcal{D}_h) = f(\underline{x}) \mathcal{V}(\mathcal{D}_h) = f(\underline{x}) h^3$ pour $h_{\text{mic}} < h < h_{\text{mac}}$

On écrit alors $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} f(\underline{x}) d^3x$

Champs de surface directionnels

$$q : \Omega \times \{\underline{n} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{n}\| = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{x}, \underline{n}) \longmapsto q(\underline{x}, \underline{n})$$



On suppose que q est intégrable sur tout $\partial\mathcal{D}$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} q(\underline{x}, \underline{n}) dS$$

Exemple : $q(\underline{x}, \underline{n}) = -1$ définit

$$\mathcal{S}_{\text{surface}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} dS$$

Ce champ ne vérifie pas l'hypothèse du continu.

Théorème des champs de surface directionnels

Si $\mathcal{F}(\mathcal{D}) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} q(\underline{x}, \underline{n}) dS$

vérifie l'hypothèse du continu, il existe $\underline{Q}(\underline{x})$ tel que

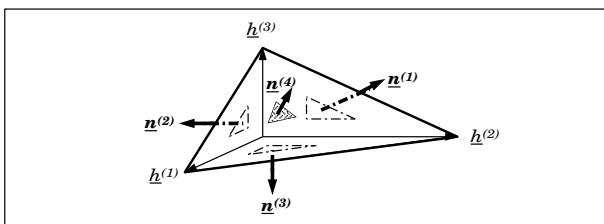
$$q(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{Q}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$$

La dépendance avec \underline{n} est **linéaire**

On a donc (théorème de la divergence)

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}(\underline{x}) \cdot \underline{n} dS = - \iiint_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{Q}(\underline{x}) d^3x$$

Démonstration :



Famille de tétraèdres emboîtés convergeant vers \underline{x}

Vecteur flux de chaleur

On modélise la "puissance thermique fournie à \mathcal{D} "
par

$$\mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} q(\underline{x}, \underline{n}, t) dS + \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x}, t) d^3x$$

Le champ $r(\underline{x}, t)$ modélise tous les apports de
chaleurs identifiés par le physicien comme étant
volumiques (e.g. rayonnement)

On suppose que \mathcal{P}_{the} vérifie l'hypothèse du continu

On en déduit que

$$q(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$$

Le flux de chaleur \underline{Q} modélise les apports de chaleur
par conduction

On peut alors écrire

$$\mathcal{P}_{\text{the}}(\mathcal{D}) = - \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}} r(\underline{x}, t) d^3x$$

Théorème de la divergence des tenseurs

$$\text{Si } \underline{\sigma}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

on définit

$$\text{div } \underline{\sigma}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Généralisation du théorème de la divergence :

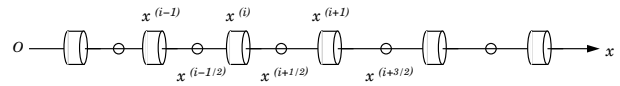
$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{\sigma}(\underline{x}) \, d^3x$$

Démonstration :

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \sigma_{ij} n_j \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, d^3x$$

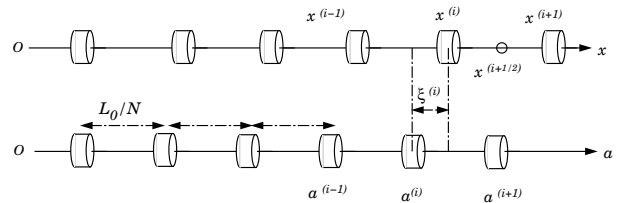
Compléments : Modèle particulaire

Équation de la chaleur

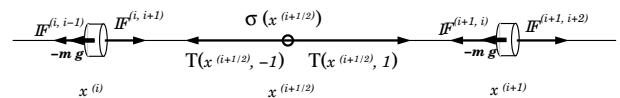


$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Déformations et cinématique

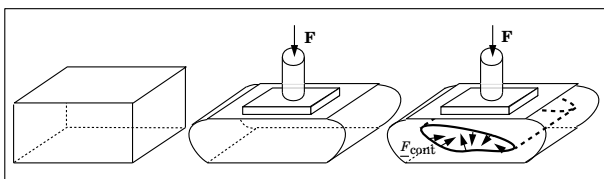


Forces de contact



Chapitre 5 : TENSEUR DES CONTRAINTES

Mise en évidence des forces de contact



On découpe un morceau de matière occupant le sous-domaine \mathcal{D} à l'intérieur du milieu

On remplace la matière par une distribution surfacique de forces $-\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{x}, \partial \mathcal{D})$

On en déduit que l'extérieur de \mathcal{D} exerce sur sa frontière $\partial \mathcal{D}$ une distribution de forces de contact $\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{x}, \partial \mathcal{D})$.

Même raisonnement en présence d'un champ de gravité g

Énumération des forces :

Forces	Résultante	Moment	Puissance
ext vol	$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D})$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D})$	$\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D})$
ext cont	$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$	$\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$
int vol	$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}(\mathcal{D})$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}(\mathcal{D})$	$\mathcal{P}_{\text{intvol}}(\mathcal{D})$
int cont	$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}(\mathcal{D})$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}(\mathcal{D})$	$\mathcal{P}_{\text{intcont}}(\mathcal{D})$

Modélisations des forces :

$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f}(\underline{x}) \, d^3x$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f} \, d^3x$	$\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f} \cdot \underline{U} \, d^3x$
$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{F}_{\text{cont}}(\underline{x}, \partial \mathcal{D}) \, dS$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{F}_{\text{cont}} \, dS$	$\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial \mathcal{D}} \underline{F}_{\text{cont}} \cdot \underline{U} \, dS$
$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$	$\mathcal{P}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = 0$
$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$	$\mathcal{P}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) \neq 0$

Forces extérieures de volume

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f}(\underline{x}) d^3x$$

$$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f} d^3x$$

$$\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x$$

Exemple : forces de gravité

$$\underline{f}(\underline{x}) = -\rho(\underline{x}) g \underline{e}^{(3)}$$

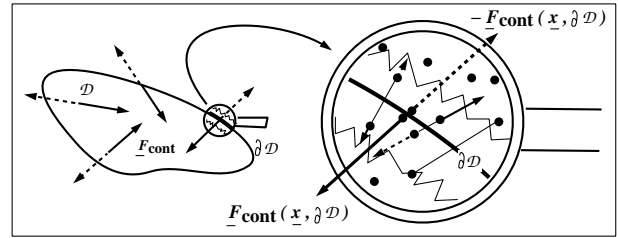
Forces de contact extérieures à \mathcal{D}

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{F}_{\text{cont}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}) dS$$

$$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{F}_{\text{cont}} dS$$

$$\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{F}_{\text{cont}} \cdot \underline{U} dS$$

Densité surfacique de forces de contact $\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D})$:



Interactions de courte portée entre les molécules proches de la frontière $\partial\mathcal{D}$

Forces intérieures de volume

On néglige les interactions volumiques entre les particules du domaine

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{M}}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$$

$$\mathcal{P}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = 0$$

Forces intérieures de contact

Conséquence du principe de l'action et de la réaction

$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$$

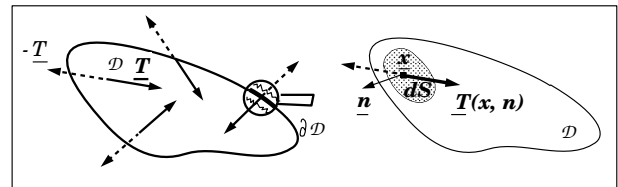
$$\underline{\mathcal{M}}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) = \underline{0}$$

$$\mathcal{P}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) \neq 0 \quad (\text{chapitre 6})$$

Hypothèse sur les forces de contact

champ de surface directionnel :

$$\underline{F}_{\text{cont}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}) = \underline{T}(\underline{x}, \underline{n})$$



$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS$$

$$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \underline{\mathcal{M}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS$$

$$\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) \cdot \underline{U}(\underline{x}) dS$$

Tenseur des contraintes

On suppose que la résultante des forces de contact

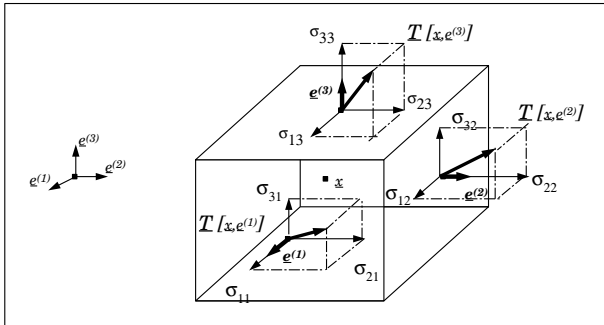
$$\underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS$$

vérifie "l'hypothèse du continu", i.e. tend vers zéro comme $\mathcal{V}(\mathcal{D})$ lorsque ce volume tend vers zéro.

Le "théorème des champs de surface directionnels" (chapitre 4) entraîne alors la dépendance linéaire

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n}$$

$$T_i(\underline{x}, \underline{n}) = \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, 3$$



Densité volumique $\underline{f}_{\text{cont}}$

de la résultante des forces de contact définie par

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) &= \underline{\mathcal{F}}_{\text{cont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS \\ &= \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) d^3x \end{aligned}$$

Théorème de la divergence des tenseurs (chapitre 4) :

$$\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) = \text{div } \underline{\sigma}(\underline{x})$$

Peut-on écrire le tableau suivant ?

$\underline{\mathcal{F}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) =$	$\underline{\mathcal{M}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) =$	$\underline{\mathcal{P}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) =$
$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS$	$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{T} dS$	$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T} \cdot \underline{U} dS$
$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n} dS$	$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge (\underline{\sigma} \underline{n}) dS$	$\iint_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{U} dS$
$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) d^3x$	$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f}_{\text{cont}} d^3x ?$	$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{f}_{\text{cont}} \cdot \underline{U} d^3x ??$

Symétrie du tenseur des contraintes

On a $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n}$ et $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) = \text{div } \underline{\sigma}(\underline{x})$

Le tenseur $\underline{\sigma}(\underline{x})$ est symétrique si et seulement si

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge \underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) d^3x$$

Démonstration :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{x} \wedge [\underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n}] dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{x} \wedge [\text{div } \underline{\sigma}(\underline{x})] d^3x$$

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}(\underline{x}) n_l dS = \iiint_{\mathcal{D}} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}(\underline{x}) d^3x$$

$$\text{(théo. de la div.)} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_l} [\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}(\underline{x})] d^3x$$

$$\text{d'où } \frac{\partial}{\partial x_l} [\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}(\underline{x})] = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}(\underline{x})$$

$$\text{(dérivation)} = \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl}(\underline{x}) + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}(\underline{x})$$

$$\text{d'où } \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl}(\underline{x}) = \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj}(\underline{x}) = 0$$

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 : \sigma_{23} - \sigma_{32} = \sigma_{31} - \sigma_{13} = \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$$

Expressions de $\underline{\mathcal{P}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D})$

On a $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n}$ et $\underline{f}_{\text{cont}}(\underline{x}) = \text{div } \underline{\sigma}(\underline{x})$

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T} \cdot \underline{U} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f}_{\text{cont}} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{tK}(\underline{x}) d^3x$$

où $\underline{A} : \underline{B} = \text{tr}(\underline{A} \underline{B}) = \text{tr}(\underline{B} \underline{A}) = A_{ij} B_{ji}$

Dans le cas où $\underline{\sigma}$ est symétrique :

$$\underline{\mathcal{P}}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{\sigma} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} d^3x$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{T} \cdot \underline{U} dS &= \iint_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{U} dS \\ &= \iint_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} n_j U_i dS = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial (\sigma_{ij} U_i)}{\partial x_j} d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} U_i d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{\sigma} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{tK} d^3x \end{aligned}$$

Chapitre 6 : LOIS DE CONSERVATION

Soit $\mathcal{D}(t)$ transporté par le mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$

Formulation intégrale :

Une équation de bilan est la donnée de

$c(\underline{x}, t)$, $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ et $f_c(\underline{x}, t)$ tels que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c \, d^3x$$

Formulation conservative :

De manière équivalente, on a

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial c}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}} f_c \, d^3x$$

et donc

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c$$

Loi de conservation de la masse

Formulation intégrale :

$$\frac{d}{dt} m[\mathcal{D}(t)] = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) \, d^3x = 0$$

Pas de flux ($\underline{Q}_\rho = \underline{0}$)

Pas de production volumique ($f_\rho = 0$)

Formulation conservative :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{U}) = 0$$

Autres écritures :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0$$

Équation de bilan (suite)

On pose $c = \rho \phi$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c \, d^3x$$

Si la masse est conservée on a (Reynolds)

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\phi}{dt} \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c \, d^3x$$

Formulation avec masse conservée :

$$\rho \frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div} \underline{Q}_c = f_c,$$

Autre démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (c \underline{U}) &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \operatorname{div} (\rho \phi \underline{U}) \\ &= \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \phi \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{U} \right) \phi \\ &= \rho \frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

Trois formulations d'une équation de bilan

Une équation de bilan est la donnée de

$$\left[c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t), \quad \underline{Q}_c(\underline{x}, t), \quad f_c(\underline{x}, t) \right]$$

et de l'une des formulations équivalentes :

Formulation intégrale

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \phi \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c \, d^3x$$

Formulation conservative

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \phi \underline{U} + \underline{Q}_c) = f_c$$

Formulation avec masse conservée

$$\rho \frac{d\phi}{dt} + \operatorname{div} \underline{Q}_c = f_c$$

Principe fondamental de la dynamique

Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}} \rho \underline{U} d^3x &= \mathcal{F}_{\text{cont}}(\mathcal{D}) + \mathcal{F}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) \\ &= \iint_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} \underline{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f} d^3x \end{aligned}$$

Formulation intégrale :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} d^3x$$

Formulation conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}) + \underline{\text{div}}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U} - \underline{\sigma}) = \underline{f}$$

Formulation avec masse conservée :

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$$

Équation de bilan de l'énergie cinétique

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x .$$

La puissance des efforts intérieurs est définie par

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{ext}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] .$$

$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}_{\text{extvol}} + \mathcal{P}_{\text{extcont}}$	$\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{intvol}} + \mathcal{P}_{\text{intcont}}$
$\mathcal{P}_{\text{extvol}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x$	$\mathcal{P}_{\text{intvol}}(\mathcal{D}) = 0$
$\mathcal{P}_{\text{extcont}}(\mathcal{D}) = \iint_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{U} dS$	$\mathcal{P}_{\text{intcont}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}}(\underline{x}, t) d^3x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] &= [\mathcal{P}_{\text{extvol}} + \mathcal{P}_{\text{extcont}} + \mathcal{P}_{\text{intcont}}][\mathcal{D}(t)] \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{U} dS + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x \end{aligned}$$

NB : $(\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot \underline{U} = (\underline{\sigma} \underline{U}) \cdot \underline{n}$ car $\underline{\sigma}$ est symétrique.

Expression de π_{int}

La loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \underline{f} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\underline{U}}{dt} \cdot \underline{U} d^3x \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \cdot \underline{U} d^3x . \end{aligned}$$

La définition de la puissance intérieure

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{ext}}[\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$$

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \underline{U} \cdot \underline{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x$$

entraîne alors

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \cdot \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

Expression de π_{int} (suite)

On a trouvé :

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \cdot \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \underline{U} \cdot \underline{n} dS$$

L'identité :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\sigma} \underline{U}) = (\underline{\text{div}} \underline{\sigma}) \cdot \underline{U} + \underline{\sigma} : \underline{D}$$

permet d'écrire :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \underline{U} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \cdot \underline{U} d^3x + \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} d^3x .$$

On en déduit donc :

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} d^3x = - \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} : \underline{D} d^3x$$

La densité volumique de la puissance intérieure est :

$$\pi_{\text{int}} = - \underline{\sigma} : \underline{D}$$

Exemple : si $\underline{\sigma} = -p \underline{I}$ alors

$$\pi_{\text{int}} = p \underline{\text{div}} \underline{U} = p \frac{d}{dt}(\delta\mathcal{V})/\delta\mathcal{V}$$

Équation de bilan de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{K} [\mathcal{D}(t)] &= [\mathcal{P}_{\text{extvol}} + \mathcal{P}_{\text{extcont}} + \mathcal{P}_{\text{intcont}}] [\mathcal{D}(t)] \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} \, d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U} \, dS + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}} \, d^3x \end{aligned}$$

Formulation intégrale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \, d^3x - \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} (\underline{\sigma} \underline{U}) \cdot \underline{n} \, dS = \\ \iiint_{\mathcal{D}(t)} (\underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}) \, d^3x \end{aligned}$$

Formulation conservative

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \underline{U} - \underline{\sigma} \underline{U} \right) = \underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}$$

Formulation avec masse conservée

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) - \text{div} (\underline{\sigma} \underline{U}) = \underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}.$$

Premier principe de la thermodynamique

Énergie interne

$$\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} e_{\text{int}} \, d^3x = \iiint_{\mathcal{D}} \rho e \, d^3x$$

Énergie totale

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}(\mathcal{D}) + \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) \, d^3x$$

Premier principe

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{tot}} [\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{ext}} [\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{the}} [\mathcal{D}(t)]$$

Puissance thermique

$$\mathcal{P}_{\text{the}} [\mathcal{D}(t)] = - \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \, dS + \iiint_{\mathcal{D}(t)} r(\underline{x}, t) \, d^3x$$

Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} [\mathcal{D}(t)] = \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \underline{U} \cdot \underline{n} \, dS + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{f} \cdot \underline{U} \, d^3x$$

Loi de conservation de l'énergie totale

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{tot}} [\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{ext}} [\mathcal{D}(t)] + \mathcal{P}_{\text{the}} [\mathcal{D}(t)]$$

Formulation intégrale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e \right) \, d^3x \\ + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} (-\underline{\sigma} \underline{U} + \underline{Q}) \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} (\underline{f} \cdot \underline{U} + r) \, d^3x \end{aligned}$$

Formulation conservative

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e \right) \\ + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \underline{U} + \rho e \underline{U} - \underline{\sigma} \underline{U} + \underline{Q} \right) = \underline{f} \cdot \underline{U} + r \end{aligned}$$

Formulation avec masse conservée

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) + \text{div} (-\underline{\sigma} \underline{U} + \underline{Q}) = \underline{f} \cdot \underline{U} + r$$

Équation de bilan de l'énergie interne

Premier principe de la thermodynamique

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}} + \frac{d}{dt} \mathcal{K} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{the}}$$

Définition de la puissance des efforts intérieurs

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

$$\text{Par soustraction : } \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{the}} - \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Formulation intégrale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho e \, d^3x \\ + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q} \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} (r + \underline{\sigma} : \underline{D}) \, d^3x \end{aligned}$$

Formulation conservative

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div} (\rho e \underline{U} + \underline{Q}) = r + \underline{\sigma} : \underline{D},$$

Formulation avec masse conservée

$$\rho \frac{d}{dt} e + \text{div} \underline{Q} = r + \underline{\sigma} : \underline{D}$$

Récapitulatif des équations de bilan

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c \, d^3x$$

Grandeur	Densité	Flux	Production
$c[\mathcal{D}(t)]$	c	\underline{Q}_c	f_c
$m[\mathcal{D}(t)]$	ρ	0	0
$\underline{p}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho \underline{U}$	$-\underline{\sigma}$	\underline{f}
$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$	ρe	\underline{Q}	$r + \underline{\sigma} : \underline{D}$
$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$-\underline{\sigma} \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} - \underline{\sigma} : \underline{D}$
$\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e$	$-\underline{\sigma} \underline{U} + \underline{Q}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + r$

$(\mathcal{E}_{\text{int}}, \mathcal{K})$: équations de bilan

$(m, \underline{p}, \mathcal{E}_{\text{tot}})$: lois de conservation

Équations du mouvement

1) Loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \rho = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$$

2) Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \right) = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}$$

3) Équation de bilan de l'énergie interne

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} e \right) = r - \operatorname{div} \underline{Q} + \underline{\sigma} : \underline{D}$$

4) Conditions aux limites et conditions initiales

5) Lois d'état

$$p = \mathcal{P}(\rho, e) \quad \text{et} \quad e = \mathcal{E}(\rho, T)$$

6) Lois de comportement

$$\text{Thermique} : \underline{Q} ? \quad \text{Rhéologique} : \underline{\sigma} ?$$

Loi de comportement thermique

Loi de Fourier :

$$\underline{Q} = \underline{Q}(T) = -k \underline{\text{grad}} T$$

Exemple : équation de la chaleur stationnaire

Équation de bilan de l'énergie interne

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} e \right) = r - \operatorname{div} \underline{Q} + \underline{\sigma} : \underline{D}$$

Si $\underline{U} = \underline{0}$ (repos) et $\frac{\partial e}{\partial t} = 0$ (stationnaire) on a

$$\operatorname{div} \underline{Q}(\underline{x}) = r(\underline{x}) \quad \text{pour } \underline{x} \in \Omega$$

Conditions aux limites :

$$\underline{Q}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = q_{\text{limit}}(\underline{x}, \partial\Omega) \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega$$

On en déduit

$$-k \Delta T(\underline{x}) = r(\underline{x}) \quad \text{pour } \underline{x} \in \Omega$$

$$\text{avec } -k \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}) = q_{\text{limit}}(\underline{x}, \partial\Omega) \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega$$

Lois de comportement rhéologiques

Chapitre 7 : **matériaux élastiques**

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathcal{G}}_{\text{elast}}(\underline{\epsilon}),$$

tenseur des petites déformations :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i} \right)$$

champ de déplacement (Ω_0 non contraint) :

$$\underline{\xi}(\underline{a}) = \underline{X}(\underline{a}) - \underline{a}$$

Chapitre 8 : **milieux fluides**

$$\underline{\sigma} = \underline{\mathcal{G}}_{\text{fluide}}(p, \underline{D}),$$

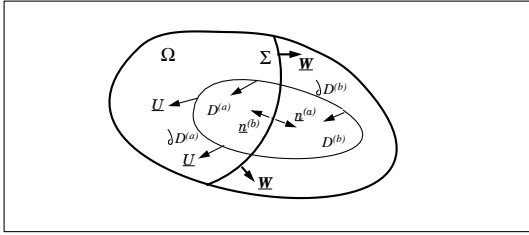
tenseur des taux de déformation

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \underline{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

pression thermodynamique (loi d'état)

$$p = \mathcal{P}(\rho, e)$$

Cplts : lois de conservation et discontinuités



Forme intégrale de l'équation de bilan :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[\mathcal{D}(t)] - \mathcal{F}_{\text{flux}}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{F}_{\text{volum}}[\mathcal{D}(t)]$$

Modélisation du terme de flux :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} dS \\ + \iint_{\Sigma(t) \cap \mathcal{D}(t)} \llbracket \underline{Q}_c \rrbracket \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x \end{aligned}$$

En explicitant $\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x$ (chapitre 3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \left(c \underline{U} + \underline{Q}_c \right) &= f_c \quad \text{pour } \underline{x} \in \Omega(t) - \Sigma(t) \\ \llbracket c (\underline{U} - \underline{W}) + \underline{Q}_c \rrbracket \cdot \underline{n} &= 0 \quad \text{pour } \underline{x} \in \Sigma(t) \end{aligned}$$

Cplts : 2nd principe de la thermodynamique

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho s d^3x \geq - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \frac{Q}{T} \cdot \underline{n} dS + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{r}{T} d^3x$$

Taux de production d'entropie irréversible $\mathcal{I}[\mathcal{D}(t)]$:

$$LHS - RHS = \mathcal{I}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} i(\underline{x}, t) d^3x \geq 0$$

Équation de bilan de l'entropie :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{Q}{T} \right) = \frac{r}{T} + i \quad \text{avec} \quad i(\underline{x}, t) \geq 0$$

Puissances réversibles : thermique et efforts internes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] &= \mathcal{P}_{\text{the}}^{(\text{rev})}[\mathcal{D}(t)] - \mathcal{P}_{\text{int}}^{(\text{rev})}[\mathcal{D}(t)] \\ &= \mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)] - \mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)] \end{aligned}$$

Thermodynamique :

$$\mathcal{P}_{\text{the}}^{(\text{rev})}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho T \frac{ds}{dt} d^3x$$

Modélisation :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}^{(\text{rev})}[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \pi_{\text{int}}^{(\text{rev})} d^3x$$

Second principe (suite)

La définition des puissance réversibles s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{the}}^{(\text{rev})}[\mathcal{D}(t)] - \mathcal{P}_{\text{int}}^{(\text{rev})}[\mathcal{D}(t)] = \mathcal{P}_{\text{the}}[\mathcal{D}(t)] - \mathcal{P}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$$

$$\implies \rho T \frac{ds}{dt} - \pi_{\text{int}}^{(\text{rev})} = -\text{div} \underline{Q} + r + \underline{\sigma} : \underline{D}$$

La formulation du second principe s'écrit

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \left(\frac{Q}{T} \right) = \frac{r}{T} + i \quad \text{avec} \quad i(\underline{x}, t) \geq 0$$

On en déduit (quelques calculs) :

$$i = -\frac{\text{grad} T \cdot \underline{Q}}{T^2} + \frac{\underline{\sigma} : \underline{D}}{T} + \frac{\pi_{\text{int}}^{(\text{rev})}}{T}$$

Puissance réversible pour les fluides :

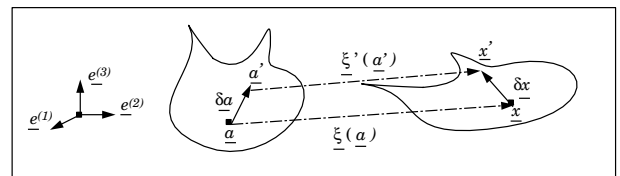
$$\pi_{\text{int}}^{(\text{rev})} = \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = p \text{div} \underline{U}$$

Puissance réversible pour les solides élastiques :

$$\pi_{\text{int}}^{(\text{rev})} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\underline{\sigma} : \underline{\epsilon})$$

Conséquences : $k > 0$, $\kappa_e > 0$, $\nu \in [-1, 1/2]$, etc.

Chapitre 7 : ÉLASTICITÉ LINÉAIRE



Champ de déplacement : $\underline{\xi}$

$$\underline{X}(\underline{a}) = \underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a})$$

Le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{a}) = \underline{\xi}^{(L)}(\underline{a})$ est toujours décrit dans sa représentation lagrangienne.

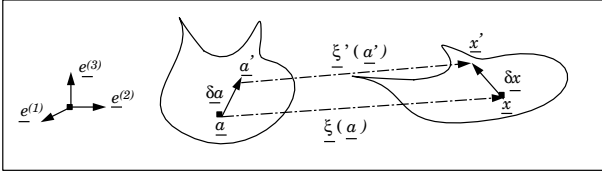
Dans ce chapitre, les opérateurs différentiels

$$\text{grad}, \underline{\text{grad}}, \text{div}, \underline{\text{div}}, \text{rot} \text{ et } \Delta$$

portent sur la variable \underline{a} .

Ω_0 est la configuration de référence.

Gradient du champ de déplacement : \underline{H}



$$\underline{\xi}(\underline{a} + \delta \underline{a}) = \underline{\xi}(\underline{a}) + \underline{H}(\underline{a}) \delta \underline{a} + O[(\delta a)^2]$$

La matrice $\underline{H}(\underline{a})$ a pour composantes

$$H_{ij}(\underline{a}) = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a})$$

Si $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a})$, $\underline{x}' = \underline{X}(\underline{a}')$, $\delta \underline{a} = \underline{a}' - \underline{a}$, $\delta \underline{x} = \underline{x}' - \underline{x}$:

$$\delta \underline{x} - \delta \underline{a} = \underline{\xi}(\underline{a}') - \underline{\xi}(\underline{a}) = \underline{H}(\underline{a}) \cdot \delta \underline{a} + O[(\delta a)^2]$$

La définition $\underline{X}(\underline{a}) = \underline{a} + \underline{\xi}(\underline{a})$ entraîne

$$\underline{F}(\underline{a}) = \underline{I} + \underline{H}(\underline{a})$$

$$\underline{H}(\underline{a}) = \underline{\epsilon}(\underline{a}) + \underline{\phi}(\underline{a})$$

Composante symétrique du gradient : $\underline{\epsilon}$

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2}(\underline{H} + {}^t \underline{H})$$

$$\epsilon_{ij}(\underline{a}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a}) + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i}(\underline{a}) \right]$$

Produit scalaire : ${}^t \delta \underline{a}' \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a} = \delta a'_i \epsilon_{ij}(\underline{a}) \delta a_j$

Composante antisymétrique du gradient : $\underline{\phi}$

$$\underline{\phi} = \frac{1}{2}(\underline{H} - {}^t \underline{H})$$

$$\phi_{ij}(\underline{a}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial a_j}(\underline{a}) - \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i}(\underline{a}) \right]$$

Vecteur $\underline{\phi}$: $\underline{\phi}(\underline{a}) \delta \underline{a} = \underline{\phi}(\underline{a}) \wedge \delta \underline{a}$

Hypothèse des petites déformations

Petits déplacements :

Longueur caractéristique l_{car} donnée

$$\eta_{dep} = \text{Sup}_{\underline{a} \in \Omega_0} \frac{\|\underline{\xi}(\underline{a})\|}{l_{car}} \ll 1$$

Petites déformations :

$$\eta_{def} = \text{Sup}_{\underline{a} \in \Omega_0} \|\underline{H}(\underline{a})\| \ll 1$$

Représentations des champs peu déformés :

Longueur caractéristique définie par

$$l_B^{-1} = \text{Sup}_{\underline{x} \in \Omega} \frac{\|\text{grad } B^{(E)}(\underline{x})\|}{|B^{(E)}(\underline{x})|}$$

$$\eta_B = \text{Sup}_{\underline{a} \in \Omega_0} \frac{\|\underline{\xi}(\underline{a})\|}{l_B} \ll 1$$

Hypothèse des Petites Perturbations :

$$\eta_{dep} \ll 1, \quad \eta_{def} \ll 1 \quad \text{et} \quad \eta_B \ll 1$$

Tenseur des petites déformations : $\underline{\epsilon}$

Comme $\underline{F} = \underline{I} + \underline{H}$, on peut écrire

$$\underline{C} = {}^t \underline{F} \underline{F} = (\underline{I} + {}^t \underline{H})(\underline{I} + \underline{H}) = \underline{I} + {}^t \underline{H} + \underline{H} + {}^t \underline{H} \underline{H}$$

Hypothèse des petites déformations :

$$\underline{H} = \underline{Q}(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta \ll 1$$

On a donc

$$\underline{C} = \underline{I} + 2 \underline{\epsilon} + \underline{Q}(\eta^2)$$

où le tenseur des petites déformations est

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2}({}^t \underline{H} + \underline{H})$$

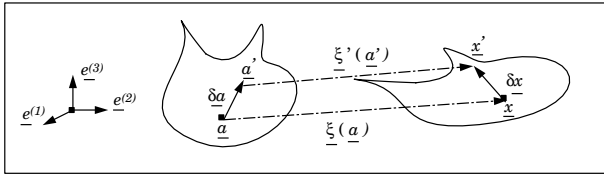
NB : le tenseur des (grandes) déformations de

Green-Lagrange \underline{L} est défini par $\underline{C} = \underline{I} + 2 \underline{L}$.

Dans le cadre des petites déformations, on a donc

$$\underline{L} = \underline{\epsilon} + \underline{Q}(\eta^2)$$

Allongement relatif : $\Delta(\underline{a}; \delta \underline{a})$



Petit vecteur $\delta \underline{a} = \underline{a}' - \underline{a}$ dont l'image est le petit vecteur $\delta \underline{x} = \underline{x}' - \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}') - \underline{X}(\underline{a})$

Allongement relatif en \underline{a} dans la direction $\delta \underline{a}$:

$$\Delta(\underline{a}; \delta \underline{a}) = \frac{\|\delta \underline{x}\| - \|\delta \underline{a}\|}{\|\delta \underline{a}\|}$$

Comme $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + \underline{O}(\eta^2)$, on a

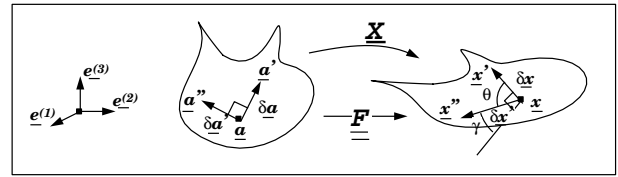
$$\|\delta \underline{x}\| = \sqrt{{}^t \delta \underline{a} \underline{C}(\underline{a}) \delta \underline{a}} = \sqrt{\|\delta \underline{a}\|^2 + 2 {}^t \delta \underline{a} \underline{\epsilon} \delta \underline{a} + \underline{O}(\eta^2)}$$

D'où $\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\delta \underline{a}\|} = 1 + \frac{{}^t \delta \underline{a} \underline{\epsilon} \delta \underline{a}}{\|\delta \underline{a}\|^2} + \underline{O}(\eta^2)$

À l'ordre dominant en η , on a donc

$$\Delta(\underline{a}; \delta \underline{a}) \sim \frac{{}^t \delta \underline{a} \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a}}{\|\delta \underline{a}\|^2}$$

Glissement des vecteurs orthogonaux



L'angle de glissement en \underline{a} des petits vecteurs $\delta \underline{a}$ et $\delta \underline{a}'$ orthogonaux est $\gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}')$ défini par

$$\sin \gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}') = \frac{{}^t \delta \underline{a} \underline{C}(\underline{a}) \delta \underline{a}'}{\sqrt{{}^t \delta \underline{a} \underline{C}(\underline{a}) \delta \underline{a}} \sqrt{{}^t \delta \underline{a}' \underline{C}(\underline{a}) \delta \underline{a}'}}$$

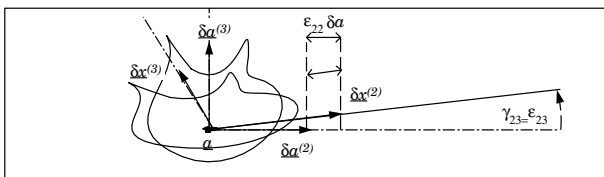
Comme $\underline{C} = \underline{I} + 2\underline{\epsilon} + \underline{O}(\eta^2)$, on a

$$\sin \gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}') = 2 \frac{{}^t \delta \underline{a}' \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a}}{\|\delta \underline{a}\| \|\delta \underline{a}'\|} + \underline{O}(\eta^2)$$

En approximant le sinus par l'angle, on en déduit

$$\gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}, \delta \underline{a}') \sim 2 \frac{{}^t \delta \underline{a}' \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a}}{\|\delta \underline{a}\| \|\delta \underline{a}'\|} = 2 \frac{\delta a'_i \epsilon_{ij} \delta a_j}{\sqrt{\delta a_n \delta a_n} \sqrt{\delta a'_m \delta a'_m}}$$

Déformation de la base canonique



Base orthonormale $\{\delta \underline{a}^{(1)}, \delta \underline{a}^{(2)}, \delta \underline{a}^{(3)}\}$ où

$$\delta \underline{a}^{(i)} = \delta a \underline{e}^{(i)}$$

On considère les images $\{\delta \underline{x}^{(1)}, \delta \underline{x}^{(2)}, \delta \underline{x}^{(3)}\}$ avec

$$\delta \underline{x}^{(i)} = \underline{F}(\underline{a}) \delta \underline{a}^{(i)} = [\underline{I} + \underline{H}(\underline{a})] \delta \underline{a}^{(i)}$$

Pour le petit vecteur $\delta \underline{a}^{(1)} = \delta a \underline{e}^{(1)}$, on peut écrire

$$\Delta(\underline{a}; \delta \underline{a}^{(1)}) = \frac{{}^t \delta \underline{a}^{(1)} \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a}^{(1)}}{\|\delta \underline{a}^{(1)}\|^2} = \epsilon_{11}$$

En notant $\gamma_{ij} = \gamma(\underline{a}; \delta \underline{a}^{(i)}, \delta \underline{a}^{(j)})$, on a

$$\gamma_{ij} \sim 2 \frac{{}^t \delta \underline{a}^{(i)} \underline{\epsilon}(\underline{a}) \delta \underline{a}^{(j)}}{\|\delta \underline{a}\|^2} = 2 \epsilon_{ij}$$

Transport des volumes

Base orthonormale $\{\delta \underline{a}^{(1)}, \delta \underline{a}^{(2)}, \delta \underline{a}^{(3)}\}$ de volume

$$\delta \mathcal{V}_0 = \delta a^3$$

Le volume du parallélépipède $\{\delta \underline{x}^{(1)}, \delta \underline{x}^{(2)}, \delta \underline{x}^{(3)}\}$ est

$$\delta \mathcal{V} = \left| \left(\delta \underline{x}^{(1)}, \delta \underline{x}^{(2)}, \delta \underline{x}^{(3)} \right) \right| \sim \|\delta \underline{x}^{(1)}\| \|\delta \underline{x}^{(2)}\| \|\delta \underline{x}^{(3)}\|$$

Comme $\|\delta \underline{x}^{(1)}\| \sim \delta a(1 + \epsilon_{11})$, etc..., on a

$$\delta \mathcal{V} = (\delta a)^3 (1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{22})(1 + \epsilon_{33}) \sim (\delta a)^3 (1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = \delta \mathcal{V}_0 (1 + \text{tr } \underline{\epsilon})$$

Un petit volume de forme quelconque $\delta \mathcal{V}_0$ en \underline{a} est déformé en un petit volume $\delta \mathcal{V}$ tel que

$$\frac{\delta \mathcal{V} - \delta \mathcal{V}_0}{\delta \mathcal{V}_0} \sim \text{tr } [\underline{\epsilon}(\underline{a})] = \text{div } \underline{\xi}(\underline{a})$$

NB : on a $\delta \mathcal{V} = \delta \mathcal{V}_0 J(\underline{a})$ pour les grandes déformations. On a fait ici le développement

$$J(\underline{a}) = 1 + \text{tr } [\underline{\epsilon}(\underline{a})] + \underline{O}(\eta^2)$$

Loi de Hooke généralisée

Hypothèse des Petites Perturbations

Petites déformations $\underline{H}(\underline{a}) \ll 1$ et champs peu déformés $B^{(E)}(\underline{x}) = B^{(L)}(\underline{a}) = B(\underline{a})$.

Comportement élastique (mce)

Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma} = \underline{\mathcal{G}}_{\text{mce}}\{\underline{X}\}$ ne dépend que de la déformation.

Principe de localisation spatiale (pls)

Le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}(\underline{a}) = \underline{\mathcal{G}}_{\text{pls}}[\underline{F}(\underline{a})]$ ne dépend que des dérivées premières $\frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a})$.

Principe de l'indifférence matérielle (pim)

L'invariance du comportement par changement de référentiel entraîne $\underline{\sigma}(\underline{a}) = \underline{\mathcal{G}}_{\text{pim}}[\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})]$.

Principe de superposition

La relation $\underline{\sigma}(\underline{a}) = \underline{\mathcal{G}}_{\text{elast}}[\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})]$ est linéaire.

La loi de Hooke généralisée s'écrit donc :

$$\sigma_{ij}(\underline{a}) = C_{ijkl}(\underline{a}) \epsilon_{kl}(\underline{a}).$$

Comportement homogène et isotrope

Si le comportement élastique est *homogène*, les 81 (ou 36) champs $C_{ijkl}(\underline{a})$ sont indépendants de \underline{a} .

Si le comportement est *isotrope*, le comportement est donnée par la loi de Hooke

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$$

où λ et μ sont les 2 coefficients d'élasticité de Lamé.

Démonstration :

Les invariants polynomiaux de $\underline{\underline{\epsilon}}$ sont $\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})$, $\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$, $\det(\underline{\underline{\epsilon}})$ et toutes les fonctions de ces trois invariants.

La quantité (on démontre que c'est l'énergie interne)

$\Phi[\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})] = \frac{1}{2} \underline{\sigma}(\underline{a}) : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\underline{a}) \epsilon_{kl}(\underline{a}) \epsilon_{ij}(\underline{a})$ doit être invariant polynomial de $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{a})$.

Comme Φ est une fonction quadratique de $\underline{\underline{\epsilon}}$, on a

$$\Phi(\underline{\underline{\epsilon}}) = \frac{1}{2} \lambda [\text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})]^2 + \mu \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$$

En utilisant la relation $\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \epsilon_{ij}}$, on a

$$\sigma_{ij}(\underline{a}) = \lambda \epsilon_{kk}(\underline{a}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(\underline{a})$$

Module d'Young et coefficient de Poisson

La loi de Hooke

$$\underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$$

s'inverse en

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{I} + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}$$

Les coefficients de Lamé λ et μ s'écrivent

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

avec E module d'Young et ν coefficient de Poisson :

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{(\lambda + \mu)} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Démonstration : en projetant ces relations sur leur parties sphériques (1/3 trace multipliée par \underline{I}) et déviatoriques (tenseur de trace nulle).

NB : le module de compression élastique κ_e s'écrit

$$\kappa_e = \lambda + \frac{2}{3} \mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Équations de Lamé

Loi de conservation de la masse

Comme $J(\underline{a}, t) = 1 + O(\eta)$, la loi de conservation de la masse $J(\underline{a}, t) \rho(\underline{a}, t) = \rho_0$ entraîne $\rho(\underline{a}, t) \sim \rho_0$.

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2}(\underline{a}, t) = \underline{f}(\underline{a}, t) + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}(\underline{a}, t)$$

Comme $\underline{\sigma}(\underline{a}, t) = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}$, on a

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} &= \lambda \underline{\text{grad}}(\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) + 2\mu \underline{\text{div}} \underline{\underline{\epsilon}} \\ &= (\lambda + \mu) \underline{\text{grad}}(\text{div} \underline{\underline{\xi}}) + \mu \underline{\Delta} \underline{\underline{\xi}} \end{aligned}$$

Conditions aux limites

en contraintes (Neumann) :

$$\underline{\sigma}(\underline{a}, t) \underline{n} = \underline{F}_{\text{cont}}(\underline{a}, t, \partial\Omega_0) \quad \text{pour } \underline{a} \in \partial\Omega_0$$

en déplacement (Dirichlet) :

$$\underline{\xi}(\underline{a}, t) = \underline{\xi}_{\text{limit}}(\underline{a}, t) \quad \text{pour } \underline{a} \in \partial\Omega_0$$

Chapitre 8 : MÉCANIQUE DES FLUIDES

Loi de Fourier

$$\underline{Q} = -k \underline{\text{grad}} T$$

Fluides parfaits

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{G}}_{\text{parfait}}(p) = -p \underline{I}$$

Fluides newtoniens

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{G}}_{\text{visq}}(p, \underline{D}) = -p \underline{I} + \underline{\tau}(\underline{D})$$

Tenseur des contraintes visqueuses :

$$\underline{\tau}(\underline{D}) = \lambda_n \text{tr}(\underline{D}) \underline{I} + 2 \mu_n \underline{D}$$

Loi d'état pour la pression

1) Fluides compressibles : $p = \mathcal{P}(\rho, e)$

la pression est une grandeur thermodynamique

2) Fluides incompressibles : $\text{div } \underline{U} = 0$

la pression n'est plus une grandeur thermodynamique !

Fluides parfaits

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I}$$

Équations d'Euler :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div } \underline{U}$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}} p + \underline{f}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = r + k \Delta T - p \text{div } \underline{U}$$

Conditions aux limites

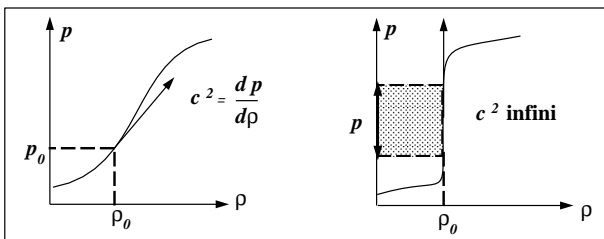
$$\underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = U_{\text{limit}}(\underline{x}, t, \partial\Omega) \quad \text{pour } x \in \partial\Omega(t)$$

Fluides parfaits compressibles

Lois d'état : $p = \mathcal{P}(\rho, e)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, T)$

Fluides parfaits incompressibles

$$\text{div } \underline{U}(\underline{x}, t) = 0,$$



$$\text{div } \underline{U} = 0$$

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\underline{\text{grad}} p + \underline{f}$$

La pression n'est plus une grandeur thermodynamique

C'est un "multiplicateur de Lagrange" associé à la contrainte d'incompressibilité

Découplage avec l'énergie interne

$$\rho \frac{de}{dt} = r + k \Delta T$$

Lois de conservation des fluides parfaits

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c \, d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c \cdot \underline{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c \, d^3x$$

Grandeur	Densité	Flux	Production
$\mathcal{C}[\mathcal{D}(t)]$	c	\underline{Q}_c	f_c
$m[\mathcal{D}(t)]$	ρ	0	0
$\underline{p}[\mathcal{D}(t)]$	$\rho \underline{U}$	$p \underline{I}$	\underline{f}
$\mathcal{E}_{\text{int}}[\mathcal{D}(t)]$	ρe	$-k \underline{\text{grad}} T$	$r - p \text{div } \underline{U}$
$\mathcal{K}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$p \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + p \text{div } \underline{U}$
$\mathcal{E}_{\text{tot}}[\mathcal{D}(t)]$	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e$	$p \underline{U} - k \underline{\text{grad}} T$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + r$

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} p \text{div } \underline{U} \, d^3x$$

Fluides newtoniens

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$$

Tenseur des contraintes visqueuses :

$$\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}}) = \lambda_n \operatorname{tr}(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{\underline{I}} + \lambda_n \operatorname{div} \underline{\underline{U}}(\underline{x}, t) \underline{\underline{I}} + 2 \mu_n \underline{\underline{D}}(\underline{x}, t)$$

Équations de Navier-Stokes :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{\underline{U}}$$

$$\rho \frac{d\underline{\underline{U}}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \underline{\underline{f}} + (\lambda_n + \mu_n) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\underline{U}} + \mu_n \Delta \underline{\underline{U}}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = r + k\Delta T - p \operatorname{div} \underline{\underline{U}} + \lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}})^2 + 2 \mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$$

Conditions aux limites :

$$\underline{\underline{U}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{U}}_{\text{limit}}(\underline{x}, t, \partial\Omega) \quad \text{pour } \underline{x} \in \partial\Omega(t)$$

Fluides newtoniens compressibles :

$$\text{Lois d'état : } p = \mathcal{P}(\rho, e) \text{ et } e = \mathcal{E}(\rho, T)$$

Fluides newtoniens incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{\underline{U}} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\underline{\underline{U}}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \underline{\underline{f}} + \mu_n \Delta \underline{\underline{U}}$$

La pression n'est plus une grandeur thermodynamique

C'est un "multiplicateur de Lagrange" associé à la contrainte d'incompressibilité

Aucune loi $p = \mathcal{P}(\rho, e)$ n'est permise !

Découplage avec l'énergie interne

$$\rho_0 \frac{de}{dt} = r + k\Delta T + 2 \mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$$

Lois de conservation des fluides newtoniens

m	ρ	0	0
$\underline{\underline{p}}$	$\rho \underline{\underline{U}}$	$p \underline{\underline{I}}$ $-\lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}}) \underline{\underline{I}}$ $-2\mu_n \underline{\underline{D}}$	$\underline{\underline{f}}$
\mathcal{E}_{int}	ρe	$-k \operatorname{grad} T$	$r - p \operatorname{div} \underline{\underline{U}}$ $+\lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}})^2$ $+2\mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$
\mathcal{K}	$\frac{1}{2} \rho \underline{\underline{U}}^2$	$p \underline{\underline{U}}$ $-\lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}}) \underline{\underline{U}}$ $-2\mu_n \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}}$	$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{U}} + p \operatorname{div} \underline{\underline{U}}$ $-\lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}})^2$ $-2\mu_n \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}$
\mathcal{E}_{tot}	$\frac{1}{2} \rho \underline{\underline{U}}^2 + \rho e$	$p \underline{\underline{U}} - k \operatorname{grad} T$ $-\lambda_n (\operatorname{div} \underline{\underline{U}}) \underline{\underline{U}}$ $-2\mu_n \underline{\underline{D}} \underline{\underline{U}}$	$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{U}} + r$

Cas inviscide

m	ρ	0	0
$\underline{\underline{p}}$	$\rho \underline{\underline{U}}$	$p \underline{\underline{I}}$	$\underline{\underline{f}}$
\mathcal{E}_{int}	ρe	$-k \operatorname{grad} T$	$r - p \operatorname{div} \underline{\underline{U}}$
\mathcal{K}	$\frac{1}{2} \rho \underline{\underline{U}}^2$	$p \underline{\underline{U}}$	$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{U}} + p \operatorname{div} \underline{\underline{U}}$
\mathcal{E}_{tot}	$\frac{1}{2} \rho \underline{\underline{U}}^2 + \rho e$	$p \underline{\underline{U}} - k \operatorname{grad} T$	$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{U}} + r$

Cas inviscide et incompressible

m	ρ	0	0
\underline{p}	$\rho \underline{U}$	$p \underline{I}$	\underline{f}
\mathcal{E}_{int}	ρe	$-k \text{grad } T$	r
\mathcal{K}	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$p \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U}$
\mathcal{E}_{tot}	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e$	$p \underline{U} - k \text{grad } T$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + r$

Cas incompressible

m	ρ	0	0
\underline{p}	$\rho \underline{U}$	$p \underline{I}$	\underline{f}
\mathcal{E}_{int}	ρe	$-k \text{grad } T$	r
\mathcal{K}	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$p \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U}$
\mathcal{E}_{tot}	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e$	$p \underline{U} - k \text{grad } T$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + r$

$-2\mu_n \underline{D}$
 $+2\mu_n \underline{D} : \underline{D}$
 $-2\mu_n \underline{D} \underline{U}$
 $-2\mu_n \underline{D} : \underline{D}$
 $-2\mu_n \underline{D} \underline{U}$

Lois de conservation des fluides newtoniens

m	ρ	0	0
\underline{p}	$\rho \underline{U}$	$p \underline{I}$	\underline{f}
\mathcal{E}_{int}	ρe	$-k \text{grad } T$	$r - p \text{div } \underline{U}$
\mathcal{K}	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2$	$p \underline{U}$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + p \text{div } \underline{U}$
\mathcal{E}_{tot}	$\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + \rho e$	$p \underline{U} - k \text{grad } T$	$\underline{f} \cdot \underline{U} + r$

$-\lambda_n (\text{div } \underline{U}) \underline{I}$
 $-2\mu_n \underline{D}$
 $+\lambda_n (\text{div } \underline{U})^2$
 $+2\mu_n \underline{D} : \underline{D}$
 $-\lambda_n (\text{div } \underline{U}) \underline{U}$
 $-\lambda_n (\text{div } \underline{U})^2$
 $-2\mu_n \underline{D} \underline{U}$
 $-2\mu_n \underline{D} : \underline{D}$
 $-\lambda_n (\text{div } \underline{U}) \underline{U}$
 $-2\mu_n \underline{D} \underline{U}$