

**PC7 : Ondes de surface**

Cette PC établit la relation de dispersion des ondes de surface dans le cas d'une profondeur infinie. Dans le cas d'une profondeur finie, la mesure de la pression au fond permet de calculer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle.

**PC7.1 Milieu très profond**

On considère une couche fluide infiniment profonde dont la surface libre, d'équation  $z = \eta(x, t)$ , est en contact avec l'atmosphère de pression constante  $p_a$ . On suppose que le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler incompressibles 2D

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z \quad (1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$  est le champ de vitesse et  $p(x, z, t)$  est le champ de pression.

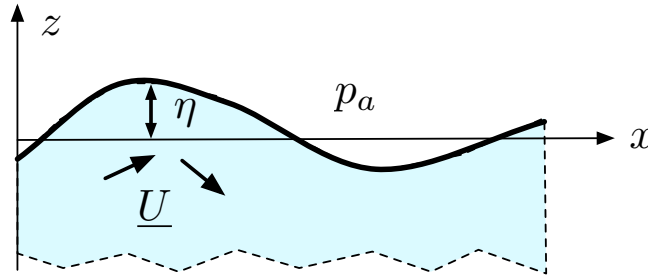


FIG. 1 – Couche infiniment profonde à surface libre d'équation  $z = \eta(x, t)$

- 1) Interpréter les conditions aux limites  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$  et  $p = p_a$  en  $z = \eta(x, t)$  et  $\lim_{z \rightarrow -\infty} w = 0$ .

La condition aux limites cinématique de surface énonce que la vitesse normale à la surface libre, d'équation  $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$ , est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit  $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} F = 0$  ou encore  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$ . La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. La condition cinématique  $w = 0$  sur un fond plat est ici reportée à l'infini  $z \rightarrow -\infty$ .

- 2) Indiquer les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations  $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$ ,  $\Delta \phi = 0$  et  $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$  avec les conditions aux limites  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$  en  $z = 0$  et  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ .

L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme  $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$  où  $\phi(x, z, t)$  est le potentiel des vitesses. La condition  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$  s'écrit alors  $\Delta \phi = 0$ . L'équation de quantité de mouvement linéarisée  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z$  s'intègre en  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + p/\rho + g z = p_a/\rho$ , la constante d'intégration  $p_a/\rho$  pouvant être choisie ainsi dans la mesure où  $\phi$  est défini à une constante  $C(t)$  près. En développant les valeurs  $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$  des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en  $z = 0$  plutôt qu'en  $z = \eta(x, t)$ . On linéarise alors ces conditions aux limites en utilisant  $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  et  $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a - \rho g z$ .

- 3) Justifier la recherche de solutions complexes de la forme  $\phi = \Phi(z) e^{i k_x x - i \omega t}$  et  $\eta = \eta_m e^{i k_x x - i \omega t}$  où  $\Phi(z)$  et  $\eta_m$  sont complexes. Montrer que  $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$  où  $k = |k_x|$ .

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. On vérifie a posteriori que le taux de croissance temporel de ces ondes est nul. En reportant dans l'équation  $\Delta \phi = 0$ , on obtient  $\Phi''(z) + k^2 \Phi(z) = 0$ . En utilisant la condition aux limites en  $-\infty$ , on voit que  $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$  où  $\Phi_m$  est une amplitude complexe arbitraire.

- 4) En déduire la relation de dispersion  $\omega = \pm\sqrt{gk}$  des ondes de surfaces en eaux profondes. Montrer que l'on peut choisir  $\eta_m$  réel sans perte de généralité et exprimer la solution réelle sous la forme  $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$  et  $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} e^{kz} \sin(k_x x - \omega t)$ . Montrer que les trajectoires de ces petites oscillations sont des cercles de centres  $(x_0, z_0)$  et de rayon  $a(z_0)$  que l'on calculera. Quel est l'ordre de grandeur de la profondeur au-dessous de laquelle une houle de longueur d'onde  $L_x$  devient négligeable ?

Les conditions aux limites s'écrivent  $-i\omega\eta_m = k\Phi_m$  et  $-i\omega\Phi_m = -g\eta_m$ . On en déduit que  $\omega^2 = gk$  et  $\Phi_m = -ig\eta_m/\omega$ . On peut se ramener à  $\eta_m$  réel en changeant l'origine des  $x$  ou des  $t$ . La partie réelle de la solution complexe est alors de la forme indiquée. Comme  $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$  et  $w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$ , la trajectoire de centre  $(x_0, z_0)$  est décrite par  $x(x_0, z_0; t) = x_0 - a \cos(k_x x - \omega t)$  et  $z(x_0, z_0; t) = z_0 + a \sin(k_x x - \omega t)$  où  $a(z_0) = g\eta_m \exp(kz_0)/\omega$  est le rayon du cercle. À la profondeur  $L_x$ , l'amplitude du mouvement a diminué d'un facteur  $\exp(-2\pi) \sim 2 \cdot 10^{-3}$ .

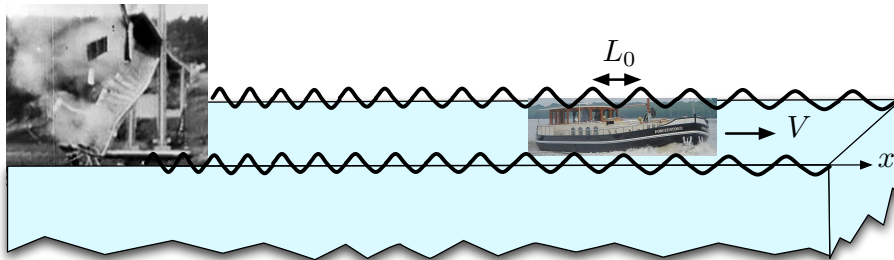


FIG. 2 – La péniche de vitesse  $V$  voit une longueur d'onde  $L_0$  suite à la rupture du pont.

- 5) Un pont traversant un canal s'écroule au passage d'une péniche qui continue sa course à la vitesse  $V$ . Au bout d'un certain temps, les passagers de la péniche observent une vague de longueur d'onde  $L_0 = 0.624$  m qui se propage à la même vitesse qu'eux. En supposant que la profondeur du canal est infinie, calculer la vitesse  $V$ . On pourra prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

Comme la profondeur est grande devant la longueur d'onde  $L_0$ , la relation de dispersion des ondes de surface peut être approximée par  $\omega(k) = \sqrt{gk}$ . La vitesse de groupe est alors  $c_g(k) = \omega'(k) = (1/2)\sqrt{g/k}$ . En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on obtient que  $V = c_g(k_0)$  avec  $k_0 = 2\pi/L_0$ . On a donc  $V = .5 \sqrt{gL_0/(2\pi)} \sim 0.5 \text{ m/s}$ .

## PC7.2 Mesure de la houle

On souhaite mesurer l'amplitude  $\eta_m$  et la longueur d'onde  $L_x = 2\pi/k_x$  d'une houle monochromatique à l'aide d'un capteur de pression disposé au fond de la couche fluide d'épaisseur  $h_r$ . On note  $p_f(t)$  le signal de pression enregistré par cette sonde.

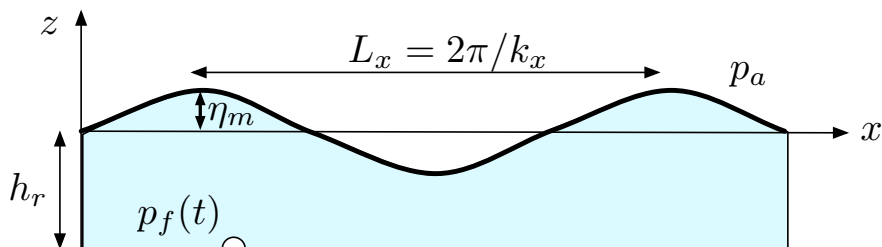


FIG. 3 – Capteur de pression pour mesurer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle.

- 6) Indiquer les étapes qui conduisent à l'expression  $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$  et  $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h_r)]}{\cosh(kh_r)} \sin(k_x x - \omega t)$  avec  $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh_r)}$  pour décrire une onde monochromatique.

La linéarisation des équations d'Euler irrotationnelle avec surface libre en contact avec l'atmosphère de pression constante conduit à un système linéaire qui permet de déterminer la structure verticale du champ de vitesse et la relation de dispersion. On a choisi ici l'onde de vitesse de phase positive.

- 7) Montrer que le champ de pression s'écrit  $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ . En déduire que  $p_f(t) = \bar{p}_f + p_m \cos(\omega t + \varphi)$  où  $p_m$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\eta_m$  et  $k_x$ . En déduire la détermination de  $k_x$  et  $\eta_m$  à partir des valeurs de  $\omega$  et  $p_n$  mesurées par la sonde. On suppose que l'on sait inverser graphiquement la fonction  $F(\xi) = \sqrt{\xi} \tanh \xi$  (voir figure 4). En supposant que  $h_r = 14.4$  m, calculer la longueur d'onde  $L$  et la hauteur  $H$  des vagues si la période mesurée est  $T = 6.24$  s et la fluctuation de pression  $p_n = 10^3$  Pa (on pourra prendre  $g = 10$  m s<sup>-2</sup>).

L'expression de pression s'obtient à partir des équations d'Euler linéarisées. On a  $\bar{p}_f = p_a - \rho g h_r$  et  $p_m = \rho g \eta_m / \cosh(k h_r)$ . Connaissant  $\omega$ , la résolution de l'équation implicite  $\omega = \sqrt{g k} \tanh(k h_r) = \sqrt{g/h_r} F(k h_r)$  à partir du tracé de  $F$  s'effectue en écrivant  $F(\xi) = \omega \sqrt{h_r/g}$  avec  $\xi = k h_r$ . On en déduit  $k$  et  $\eta_m = \frac{p_m}{\rho g} \cosh \xi$ . Pour  $T = 6.24$  s, on a  $\omega = 2\pi/T = 1$  Hz et  $\omega \sqrt{h_r/g} = 1.2$ . La résolution graphique conduit à  $\xi \sim 1.6$  dont on déduit  $\cosh \xi \sim 2.5$ . On en déduit donc  $L_x = 2\pi/k_x = 2\pi h_r/\xi = 57$  m et  $\eta_m = 0.5$  m. La hauteur des vagues est alors  $H = 2\eta_m = 0.5$  m.

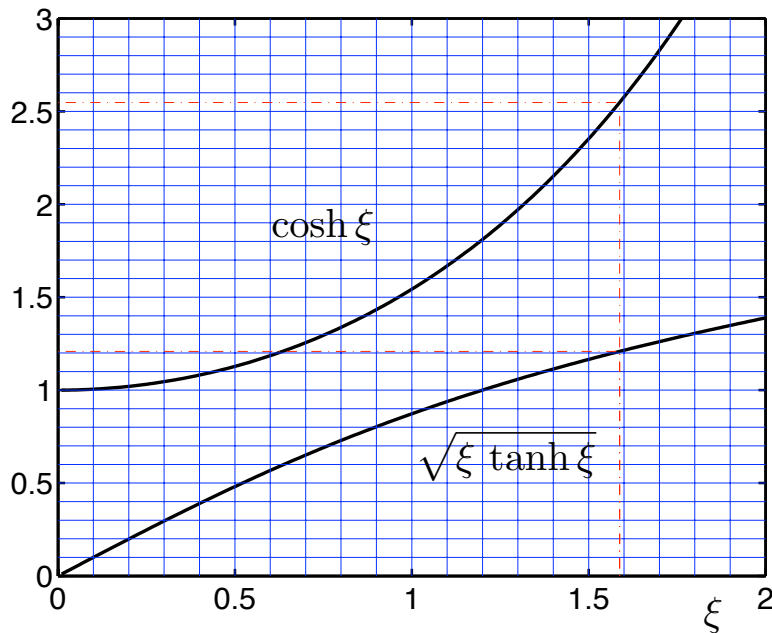


FIG. 4 – Tracé des fonctions  $\cosh(\xi)$  et  $F(\xi) = \sqrt{\xi} \tanh(\xi)$ .